Maß- und Integrationstheorie

Prof. R. Lasser

(WS 2010/11)

1 Lebesguesches Maß

Bei den bisherigen Integrationsarten mußten wir nur Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ einen Inhalt, ein Maß zuordnen. Die Lebesguesche Integration, die wir auf dem $\mathbb{R}^d$ entwickeln werden, weist allgemeineren Mengen eine Maßzahl zu. Man kann aber nicht allen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ Maßzahlen zuordnen, wenn sie den später diskutierten Bedingungen genügen sollen.
(Wir rechnen mit ∞ : $a + \infty \ = \infty \ = \infty + a \ = \infty + \infty, \ \ a \in \mathbb{R}$).

Wir konzentrieren uns auf $S = \mathbb{R}^d$ und das Lebesguesche Maß, beginnen zunächst aber ganz allgemein.

Definition 1.1 *Eine Familie* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(S)$ *(*S *eine Menge und* $\mathcal{P}(S)$ *die Menge aller Teilmengen von* S*) bestehend aus Teilmengen von* S *heißt* **Ring** *auf* S*, falls* $\emptyset \in \mathcal{R}$ *und*

(M1) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$,

(M2) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \backslash B \in \mathcal{R}$.

Ein Ring $\mathcal{R}$ *heißt* **Algebra***, falls außerdem* $S \in \mathcal{R}$.

Bemerkung: Ist $\mathcal{R}$ ein Ring, so gilt auch:

(a) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$, und $\emptyset \in \mathcal{R}$

denn $A \cap B \ = A\backslash\,(A\backslash B)$.

Definition 1.2 *Sei* $\mathcal{R}$ *ein Ring auf* S*. Eine Mengenfunktion* $m : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ *mit* $m(\emptyset) = 0$ *heißt* **Inhalt***, falls*

(M3) $m(A \cup B) \ = \ m(A) \ + \ m(B)$
für alle $A, B \in \mathcal{R}$ *mit* $A \cap B \ = \emptyset$.

Mit vollständiger Induktion erhalten wir aus (M3):

(b) $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k)$
für alle $A_1, ..., A_n \in \mathcal{R}$, paarweise disjunkt.

Desweiteren erhält man mit den disjunkten Zerlegungen $A \ = (A\backslash B) \ \cup \ (A \cap B), \ \ B \ = B\backslash A \ \cup \ (A \cap B), \ \ A \cup B \ = (A\backslash B) \ \cup \ (B\backslash A) \ \cup \ (A \cap B)$ aus (b):

(c) $m(A \cup B) \ = \ m(A\backslash B) \ + \ m(B\backslash A) \ + \ m(A \cap B)$

und damit

(d) $m(A \cup B) \;+\; m(A \cap B) \;=\; m(A) \;+\; m(B) \qquad$ für $a, b \in \mathcal{R}$.

Insbesondere gelten

(e) $m(A \cup B) \;\leq\; m(A) \;+\; m(B) \qquad$ für $A, B \in \mathcal{R}$, und

(f) $m(A) \;\leq m(B) \qquad$ für $A \subseteq B$.

Wir benötigen die Erweiterung auf abzählbare Vereinigungen.

Definition 1.3 *Eine Algebra $\mathcal{M}$ heißt* **$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra** *auf S, wenn gilt*

(M4) $A_k \in \mathcal{M},\;\; k \in \mathbb{N} \;\Longrightarrow\; \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$

Definition 1.4 *Sei $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf S. Ein Inhalt $m : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ heißt* **Maß**, *falls*

(M5) $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(A_k)$

für alle $A_k \in \mathcal{M},\; k \in \mathbb{N},\;$ mit $A_k \cap A_j \;= \emptyset,\; k \neq j$.

Lemma 1.5 *Sei $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf S, m ein Inhalt auf $\mathcal{M}$. (M5) ist äquivalent zu*

(M5)' $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k\right) \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} m(B_n)$

für alle $B_k \in \mathcal{M},\; k \in \mathbb{N},\;$ mit $B_k \subseteq B_{k+1}$ für alle k.

Beweis. Ist $B_1, B_2 ...$ eine aufsteigende Folge von Mengen aus $\mathcal{M}$, so sind $A_1 := B_1,\; A_2 := B_2 \backslash B_1, ...,\; A_k := B_k \backslash B_{k-1}, ...$ Mengen aus $\mathcal{M}$ paarweise disjunkt. Ferner gelten

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \;=\; B_n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}, \text{ und } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

Gilt nun (M5), so haben wir (M5)' wegen

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \;=\; m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \;=\; \lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} m(B_n)$$

Ähnlich folgt aus (M5)' die Eigenschaft (M5). $\diamond$

Bemerkung: Ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra und $m : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ ein Maß, so gilt

(g) $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \;\leq\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(A_k)$

für alle $A_k \in \mathcal{M},\; k \in \mathbb{N}$.

Setzt man nämlich $B_k \;=\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i,$ so ist $B_k \in \mathcal{M},\; B_k \subseteq B_{k+1}$. Mit (M5)' gilt

$$\lim_{n\to\infty} m(B_n) \;=\; m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \;=\; m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

Mit Formel (e) gilt $m(B_n) \;\leq \sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k)$, und folglich

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Die einfachsten Mengen aus der σ-Algebra $\mathcal{M}$ auf $S = \mathbb{R}^d$, die uns interessieren, sind die **halboffenen Quader**

$$Q \;=\; Q\left((a_k, b_k)_{1\leq k\leq d}\right) := \;\{x \in \mathbb{R}^d :\; a_k \leq x_k < b_k,\; k = 1, ..., d\}$$

wobei $a_1 < b_1,\; a_2 < b_2, ..., a_d < b_d$.

Wir betrachten auch andere Quader. Der offene Quader Q_1 ist gegeben durch $Q_1 \;= \{x \in \mathbb{R}^d :\; a_k < x_k < b_k,\; k = 1, ..., d\}$. Der abgeschlossene Quader Q_2 ist gegeben durch $Q_2 = \overline{Q_1}$ (Abschluß). Jede Menge Q mit $Q_1 \subseteq Q \subseteq Q_2$ nennen wir Quader.

Im folgenden definieren wir für jeden halboffenen Quader $Q = Q\left((a_k, b_k)_{1\leq k\leq d}\right)$

(M6) $m(Q) := \prod\limits_{k=1}^{d} (b_k - a_k)$.

Wir werden nun eine σ-Algebra $\mathcal{M}$ auf $S = \mathbb{R}^d$ konstruieren und ein Maß m auf $\mathcal{M}$, so daß $\mathcal{M}$ alle Q enthält und dort m der Definition (M6) folgt. Später beschreiben wir ein Verfahren, wie man allgemein Maße aus bestimmten Inhalten erzeugen kann.

Bezeichne zunächst

$$(I) \qquad \mathcal{A}_0 := \{\bigcup_{j=1}^{n} Q_j :\; n \in \mathbb{N},\; Q_1, ..., Q_n \text{ halboffene Quader}\}$$

Folgendes Schneideverfahren werden wir des öfteren verwenden. Ist $A \;= \bigcup\limits_{j=1}^{n} Q_j$,

$$Q_j \;=\; \{x \in \mathbb{R}^d :\; a_{j,k} \leq x_k < b_{j,k},\; k = 1, ..., d\}$$

so zerlege A durch die Hyperebenen

$$x_k \;= a_{j,k},\; x_k \;= b_{jk}, \qquad j = 1, ..., n,\; k = 1, ..., d$$

Es entstehen halboffene paarweise disjunkte Teilquader $S_h,\ h \in I,\ I$ endlich mit

$$A \;=\; \bigcup_{j=1}^{n} Q_j \;=\; \bigcup_{h \in I} S_h$$

Wir halten fest: Ist $A \in \mathcal{A}_0$, so ist A darstellbar als endliche Vereinigung paarweise disjunkter halboffener Quader.

Satz 1.6 *$\mathcal{A}_0$ ist ein Ring auf $\mathbb{R}^d$.*

Beweis. (M1) gilt offensichtlich. Um (M2) zu zeigen, führe obiges Schneideverfahren durch, und man erhält: Zu $A, B \in \mathcal{A}_0$ gibt es endlich viele paarweise disjunkte halboffene Quader $S_h,\ h \in I,$ mit $A = \bigcup\limits_{h \in K} S_h,\quad B = \bigcup\limits_{h \in L} S_h,\quad K \subseteq I,\ L \subseteq I$. Dann gilt $A \backslash B = \bigcup\limits_{h \in K \backslash L} S_h \in \mathcal{A}_0$. $\diamond$

Als Inhalt auf $\mathcal{A}_0$ setzen wir nun fest:

$$(II) \qquad m(A) := \sum_{j=1}^{n} m(Q_j), \qquad \text{falls } A = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j$$

$$Q_j \text{ paarweise disjunkte halboffene Quader}$$

wobei $m(Q) = \prod\limits_{k=1}^{d} (b_k - a_k)$ bereits erklärt wurde.

Selbstverständlich hat man nachzuweisen, daß die Definition von $m(A)$ nicht von der Wahl der Zerlegung von A abhängt. Sei $\bigcup\limits_{j=1}^{n} Q_j = A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} R_i$ mit jeweils paarweise disjunkten Quadern Q_j bzw. R_i. Mit dem Schneideverfahren zerlegen wir Q_j, R_i in paarweise disjunkte Teilquader. Damit genügt es zu zeigen, daß bei Zerlegung eines Quaders Q in Teilquader $S_h,\ h \in I$, immer gilt

$$m(Q) \;=\; \sum_{h \in I} m(S_h)$$

Dies folgt direkt aus der Berechnung des Volumens von Q und S_h. Offensichtlich ist auch (M3) erfüllt.

Als nächsten Schritt gehen wir über zu abzählbaren Vereinigungen von halboffenen Quadern (siehe (M4)).

$$(III) \qquad \mathcal{A}_1 := \{\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j :\ Q_j,\ j \in \mathbb{N},\ \text{halboffene Quader}\}$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$. Außerdem ist $\mathbb{R}^d = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathcal{A}_1$, wobei $Q_n = Q\left((a_k, b_k)_{1 \le k \le d}\right)$, $a_k = -n,\ b_k = n$ für $k = 1, ..., d$.

Man kann $\mathcal{A}_1$ alternativ charakterisieren:

$$\mathcal{A}_1 \ = \ \{ \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m : \ B_m \in \mathcal{A}_0, \ B_m \subseteq B_{m+1} \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \}$$

Ist nämlich $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$, $\ Q_j$ halboffene Quader, so ist $A = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m$ mit $B_m := \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$. Klarerweise ist $B_m \in \mathcal{A}_0$ und $B_m \subseteq B_{m+1}$.

Sind nun $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}, (B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aufsteigende Folgen aus $\mathcal{A}_0$, so sind $(A_m \cup B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(A_m \cap B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ auch aufsteigende Folgen aus $\mathcal{A}_0$.

Damit sieht man: $A, B \in \mathcal{A}_1 \ \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_1, \ A \cap B \in \mathcal{A}_1$. Insbesondere erfüllt $\mathcal{A}_1$ die Bedingung (M1).

$\mathcal{A}_1$ erfüllt (M2) **nicht**, wie wir in Kürze anhand eines Beispiels sehen werden. Bedingung (M4) wird erfüllt. Seien dazu $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}_1$, $\ A_n \ = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_{n,m}$, $\ B_{n,m} \subseteq B_{n,m+1}$, $\ B_{n,m} \in \mathcal{A}_0$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
B_{1,1} & \subseteq & B_{1,2} & \subseteq & B_{1,3} & \subseteq & \cdots & A_1 \\[2ex]
B_{2,1} & \subseteq & B_{2,2} & \subseteq & B_{2,3} & \subseteq & \cdots & A_2 \\[2ex]
B_{3,1} & \subseteq & B_{3,2} & \subseteq & B_{3,3} & \subseteq & \cdots &
\end{array}$$

Wir setzen nun $B_k \ = \bigcup\limits_{i,j=1}^{k} B_{i,j}$. Damit gilt $B_k \in \mathcal{A}_0$ und $B_k \subseteq B_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Schließlich gilt auch $A := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \ = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Das heißt $A \in \mathcal{A}_1$, und (M4) gilt.

Wir zeigen nun, daß durch den Übergang von $\mathcal{A}_0$ zu $\mathcal{A}_1$ eine wichtige Klasse von Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ erfaßt wurde.

Satz 1.7 *Jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ gehört zu $\mathcal{A}_1$.*

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Wir werden U durch eine aufsteigende Folge von Mengen $B_m \in \mathcal{A}_0$ ausschöpfen.

Dazu bezeichne für $a = (a_1, ..., a_d) \ \in \mathbb{R}^d$, $\ s > 0$

$$Q(a, a+s) := \ \{x \in \mathbb{R}^d : \ a_k \leq x_k < a_k + s, \ k = 1, ..., d\}$$

Wir bilden die Vereinigungen

$$B_1 := \bigcup_{\substack{a_k \in I_1 \\ Q(a,a+1) \subseteq U}} Q(a, a+1) \qquad \text{mit } I_1 \ = \{-1, 0, 1\}$$

$(s=1)$

$$B_2 := \bigcup_{\substack{a_k \in I_2 \\ Q(a,a+\frac{1}{2}) \subseteq U}} Q(a, a+\frac{1}{2}) \qquad \text{mit } I_2 \ = \{-2, -2+\frac{1}{2}, -2+1, ..., 2\}$$

$(s=\frac{1}{2})$

Auf diese Art erhalten wir

$$B_m := \bigcup_{\substack{a_k \in I_m \\ Q(a,a+\frac{1}{2^{m-1}}) \subseteq U}} Q(a, a+\frac{1}{2^{m-1}}) \qquad \text{mit } I_m \ = \{-m, -m+\frac{1}{2^{m-1}}, ..., m\}$$

$(s = \dfrac{1}{2^{m-1}})$.

Mit der Konstruktion gilt: $B_m \in \mathcal{A}_0$ und $B_m \subseteq B_{m+1}$. Zum Nachweis von $U = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} B_m$ betrachte $x = (x_1, ..., x_d) \in U$. Da U offen ist, existiert ein $r > 0$, so daß $U_r(x) \subset U$. Wähle nun $m \in \mathbb{N}$ mit $\max\limits_{k \in \{1,...,d\}} |x_k| \ \leq m$ und $\sqrt{d}/2^{m-1} \ < r$.

Ferner bestimme $c_k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{c_k}{2^{m-1}} \ \leq \ x_k \ < \ \frac{c_k+1}{2^{m-1}} \qquad\qquad k = 1, ..., d$$

Dann liegt der Quader $Q\left(\dfrac{c}{2^{m-1}}, \dfrac{c}{2^{m-1}} + \dfrac{1}{2^{m-1}}\right)$, $\ c = (c_1, ..., c_d)$ ganz in $U_r(x) \subseteq U$.

Da auch $\left|\dfrac{c_k}{2^{m-1}}\right| \ \leq \ |x_k| \ \leq m$ für alle $k = 1, ..., d$, gilt $\dfrac{c_k}{2^{m-1}} \ \in I_m$ für $k = 1, ..., d$, und damit ist $Q\left(\dfrac{c}{2^{m-1}}, \dfrac{c}{2^{m-1}} + \dfrac{1}{2^{m-1}}\right) \subseteq B_m$. Damit haben wir $x \in B_m$.

Zusammengefaßt haben wir $U \subseteq \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m$ gerade gezeigt. $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m \subseteq U$ folgt aus der Konstruktion der B_m. $\diamond$

Bemerkung: Wir können nun sehen, daß $\mathcal{A}_1$ die Bedingung (M2) nicht erfüllt. Mit Satz 1.7 gilt $U_1(0) \in \mathcal{A}_1$, $U_2(0) \in \mathcal{A}_1$, $\ U_2(0) \backslash U_1(0) \ = \{x \in \mathbb{R}^d : 1 \leq \ \|x\|_2 < 2\}$.

Stellt man nun $U_2(0) \backslash U_1(0)$ als Vereinigung abzählbar vieler Quader dar, so liefert jeder Quader höchstens einen Punkt auf dem inneren Randkreis. Dieser ist aber überabzählbar.

Wir wollen nun $m : \mathcal{A}_0 \to [0, \infty]$ erweitern auf $\mathcal{A}_1$. Um zu zeigen, daß die offensichtliche Erweiterung wohldefiniert ist, benötigen wir eine Hilfsaussage.

Lemma 1.8 *Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ zwei aufsteigende Folgen von Mengen aus $\mathcal{A}_0$ mit $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$. Dann gilt stets*

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) \;=\; \lim_{j\to\infty} m(B_j),$$

(wobei möglicherweise der Wert ∞ auf beiden Seiten angenommen werden kann).

Beweis. Wir zeigen, daß für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$m(A_n) \;\leq\; \lim_{j\to\infty} m(B_j) + \epsilon \qquad (*)$$

gilt. Daraus folgt dann $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n) \leq \lim\limits_{j\to\infty} m(B_j) + \epsilon$.
Vertauscht man die Rollen der A_n mit B_j, so gilt auch $\lim\limits_{j\to\infty} m(B_j) \leq \lim\limits_{n\to\infty} m(A_n) + \epsilon$, woraus schließlich die Gleichheit der Grenzwerte folgt.

Sei also $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Nun ist $A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{r} Q_i$, Q_i paarweise disjunkte halboffene Quader. Ersetze jeden Quader Q_i durch einen etwas kleineren Quader Q_i' mit $\overline{Q_i'} \subseteq Q_i$ und $m(Q_i) - m(Q_i') \leq \dfrac{\epsilon}{2r}$. Bezeichne $A_n' := \bigcup\limits_{i=1}^{r} Q_i'$. Da (M3) gilt, folgt

$$m(A_n) \;\leq\; m(A_n') \;+\; \frac{\epsilon}{2}.$$

Ferner gilt $\overline{A_n'} \subseteq A_n$.

Jedes B_j schreibt sich als $B_j = \bigcup\limits_{l=1}^{s_j} R_{l,j}$, $R_{l,j}$ halboffener Quader. Ersetze nun $R_{l,j}$ durch einen etwas größeren Quader $R_{l,j}'$, so daß $(R_{l,j}')^o \supseteq R_{l,j}$ und $m(R_{l,j}') - m(R_{l,j}) \leq \dfrac{\epsilon}{2^{j+1} s_j}$.
(Der offene Kern $\overset{o}{M}$ einer Menge M in einem metrischen Raum ist gegeben durch $\overset{o}{M} = \{x \in M : \text{es existiert } \epsilon > 0 \text{ mit } U_\epsilon(x) \subseteq M\}$, siehe Analysis I und II.) Mit

$$\overline{A_n'} \;\subseteq A_n \;\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \;=\; \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{s_j} R_{l,j} \;\subseteq\; \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{s_j} (R_{l,j}')^o$$

folgt aus der Kompaktheit von $\overline{A'_n}$, daß bereits endlich viele $(R'_{l,j})^o$ die abgeschlossene Hülle $\overline{A'_n}$ überdecken. Insbesondere gilt $A'_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{h} B'_j$, h genügend groß, wobei $B'_j = \bigcup_{l=1}^{s_j} R'_{l,j}$ bezeichnet. Außerdem hat man $m(B'_j \backslash B_j) \leq \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Da alle vorkommenden Mengen aus $\mathcal{A}_0$ sind, kann man die Ungleichungen (e) und (f) anwenden und erhält unter Verwendung von $B'_j = (B'_j \backslash B_j) \cup B_j$ und $B_j \subseteq B_h$ für $j \leq h$:

$$m(A'_n) \leq m(B_h) + \sum_{j=1}^{h} m(B'_j \backslash B_j) \leq m(B_h) + \sum_{j=1}^{h} \frac{\epsilon}{2^{j+1}} \leq \lim_{h\to\infty} m(B_h) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Mit $m(A_n) \leq m(A'_n) + \frac{\epsilon}{2}$ folgt $(*)$. $\diamond$

Mit Lemma 1.8 ist nun die folgende Definition sinnvoll.

Definition 1.9 *Sei $A \in \mathcal{A}_1$, und sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Mengen aus $\mathcal{A}_0$ mit $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Wir setzen*

$$m(A) := \lim_{n\to\infty} m(A_n)$$

Man beachte, daß diese Definition von m eingeschränkt auf $\mathcal{A}_0$ konsistent ist mit der Definition von $m : \mathcal{A}_0 \to [0, \infty]$.

Wir überprüfen nun, ob (M3) von Definition 1.2 gültig ist. Seien $A, B \in \mathcal{A}_1$ mit $A \cap B = \emptyset$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aufsteigend aus $\mathcal{A}_0$. Dann sind $A_i \cap B_j = \emptyset$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Insbesondere sind $A_i \cap B_i = \emptyset$ und $A \cup B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cup B_i)$. Ferner gilt mit (M3) für $m|\mathcal{A}_0$

$$m(A \cup B) = \lim_{i\to\infty} m(A_i \cup B_i) = \lim_{i\to\infty} m(A_i) + \lim_{i\to\infty} m(B_i) = m(A) + m(B)$$

Obwohl (M2) nicht für $\mathcal{A}_1$ erfüllt ist, gelten die Eigenschaften, die wir für Inhalte auf Ringen gezeigt haben:

(b') $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$, $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}_1$, paarweise disjunkt.

(dies folgt aus (M3) für $\mathcal{A}_1$).

(d') $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$ für $A, B \in \mathcal{A}_1$

(e') $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$ für $A, B \in \mathcal{A}_1$

(dies folgt aus den entsprechenden Aussagen für $A, B \in \mathcal{A}_0$ und Grenzübergang mit aufsteigenden Folgen).

Es gilt auch

(f') $m(A) \le m(B)$ für $A, B \in \mathcal{A}_1,\ A \subseteq B$

Um (f') zu beweisen sei zuerst festgestellt, daß mit $M \in \mathcal{A}_0,\ N \in \mathcal{A}_1$ stets $N \backslash M \in \mathcal{A}_1$ gilt. Mit $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i,\ N_i \in \mathcal{A}_0,\ N_i \subseteq N_{i+1}$, gilt nämlich $N_i \backslash M \in \mathcal{A}_0,\ N_i \backslash M \subseteq N_{i+1} \backslash M$ und $N \backslash M = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \backslash M$.

Ist $B \in \mathcal{A}_1,\ A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_1$ mit $A_j \in \mathcal{A}_0,\ A \subseteq B$, dann gilt $B \backslash A_j \in \mathcal{A}_1$. Mit $B = (B \backslash A_j) \cup A_j$, (da $A_j \subseteq B$) gilt $m(B) = m(A_j) + m(B \backslash A_j)$, also $m(A_j) \le m(B)$. Mit $j \to \infty$ erhalten wir $m(A) \le m(B)$.

Satz 1.10 (σ-Additivität von m)
Sind $A_n \in \mathcal{A}_1,\ n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt, so gilt

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

Beweis. Seien $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{n,m},\ B_{n,m} \subseteq B_{n,m+1},\ B_{n,m} \in \mathcal{A}_0$. Setze (wie bereits geschehen) $B_k := \bigcup_{i,j=1}^{k} B_{i,j}$. Mit $B_k \subseteq B_{k+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ folgt $\lim_{k\to\infty} m(B_k) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

Andererseits gilt auch $\lim_{k\to\infty} m(B_k) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. Zum einen ist nämlich $B_k \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} A_n$, also

$$(i) \qquad m(B_k) \le m\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} m(A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Zum anderen gilt $\bigcup_{n=1}^{k} A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, also

$$(ii) \qquad \sum_{n=1}^{k} m(A_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \le \lim_{k\to\infty} m(B_k).$$

(i) und (ii) ergeben $\lim_{k\to\infty} m(B_k) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. ◇

Setzt man in Satz 1.10 nicht die Disjunktheit der $A_n \in \mathcal{A}_1$ voraus, so zeigt obiger Nachweis, daß allgemein für $A_n \in \mathcal{A}_1$ gilt

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Wir führen nun den dritten und letzten Schritt zum Lebesgue-Maß. Dieser Schritt bringt, daß auch alle abgeschlossenen Mengen meßbar sind (und auch M2 erfüllt ist).

Der erste Schritt hierzu ist die Beschreibung einer von $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(S)$ erzeugten σ-Algebra, siehe (H3), Blatt 1. Sind $\mathcal{A}_i,\ i \in I,\ \sigma$-Algebren auf S, so ist $\mathcal{A} := \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf S. Damit folgt: Ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(S)$ irgendein Mengensystem auf S, so existiert eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{T})$ auf S, die $\mathcal{T}$ enthält.

Definition 1.11 *Die von $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{A}_0) =: \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ heißt* **Borel-σ-Algebra**. *Mengen $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ heißen Borel-messbar oder Borelmengen. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist auch gleich der von den offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^d$ erzeugten σ-Algebra.*

Für die folgenden Überlegungen erinnern wir an Satz 1.10, in dem steht, daß der Inhalt $m : \mathcal{A}_0 \to [0, \infty]$ σ-additiv ist. Mit Satz 1.10 haben wir sogar die σ-Additivität von $m : \mathcal{A}_1 \to [0, \infty]$ gezeigt.

Definition 1.12 *Sei S eine Menge. Eine Abbildung $\alpha : \mathcal{P}(S) \to [0, \infty]$ heißt* **äußeres Maß**, *wenn*

(i) $\alpha(\emptyset) = 0$.

(ii) Für $A \subseteq B$ gilt $\alpha(A) \leq \alpha(B)$.

(iii) Für $A_1, A_2, ... \in \mathcal{P}(S)$ gilt $\alpha\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha(A_i)$ *(σ-Subadditivität).*

Relativ leicht kann man nun folgenden Sachverhalt zeigen.

Satz 1.13 *Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Ring auf S, und $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Für $A \subseteq S$ setze*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) :\ (E_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{R} \text{ mit } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}$$

bzw. $\mu^*(A) = \infty$, falls es keine solche Folge gibt. Dann ist μ^* ein äußeres Maß.

Beweis. Erfolgt in den Übungen. $\diamond$

Definition 1.14 *Sei $\alpha : \mathcal{P}(S) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann heißt $A \subseteq S$* **α-messbar**, *falls*

$$\alpha(E) = \alpha(E \cap A) + \alpha(E \cap (S \backslash A))$$

für alle $E \subseteq S$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_\alpha$ die Menge aller α-messbaren Teilmengen von S.

Satz 1.15 (Carathéodory)
Sei $\alpha : \mathcal{P}(S) \to [0,\infty]$ *ein äußeres Maß. Es gilt:*

(a) $\mathcal{M}_\alpha$ *ist eine* σ*-Algebra.*

(b) $\alpha|\mathcal{M}_\alpha$*, die Einschränkung von* α *auf* $\mathcal{M}_\alpha$*, ist* σ*-additiv, also ein Maß.*

(c) Ist $A \subseteq S$ *mit* $\alpha(A) = 0$*, so ist* $A \in \mathcal{M}_\alpha$*.*

Beweis.

(1) Aus der definierenden Gleichung für $\mathcal{M}_\alpha$ folgt: $A \in \mathcal{M}_\alpha \Leftrightarrow S\backslash A \in \mathcal{M}_\alpha$. Ist nun $\alpha(A) = 0$, so gilt für alle $E \subseteq S$:

$$0 \;\leq\; \alpha(A \cap E) \;\leq\; \alpha(A) \;=\; 0$$

und deshalb mit der Monotonie und $\alpha(E \cap A) = 0$,

$$\alpha(E) \;\geq\; \alpha(E \cap (S\backslash A)) \;+ \alpha(E \cap A).$$

Mit der σ-Subadditivität gilt umgekehrt:

$$\alpha(E) \;\leq\; \alpha(E \cap (S\backslash A)) \;+ \alpha(E \cap A).$$

Zusammen folgt $A \in \mathcal{M}_\alpha$ und (c) ist gezeigt. Insbesondere ist $\emptyset \in \mathcal{M}_\alpha$ und dann auch $S \in \mathcal{M}_\alpha$. (Anmerkung: Es kann vorkommen, daß nur $\emptyset, S \in \mathcal{M}_\alpha$ gilt.)

(2) Wir zeigen nun, daß aus $A, B \in \mathcal{M}_\alpha$ auch $A\backslash B \in \mathcal{M}_\alpha$ folgt. Für $E \subseteq S$ gilt nämlich

$$\alpha(E) \;=\; \alpha(E \cap A) \;+\; \alpha(E \cap (S\backslash A))$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha((E \cap A) \cap B) \;+\; \alpha((E \cap A) \cap S\backslash B) \;+\; \alpha(E \cap (S\backslash A)) \\
&= \alpha(E \cap (A\backslash B)) \;+\; [\,\alpha(E \cap A \cap B) \;+\; \alpha(E \cap (S\backslash A))\,] \\
&\geq \alpha(E \cap (A\backslash B)) \;+\; \alpha(E \cap (S\backslash(A\backslash B))).
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt dabei aus

$$E \cap (S\backslash(A\backslash B)) \;=\; E \cap (B \cup (S\backslash A)) \;=\; E \cap (S\backslash A) \cup (E \cap B)$$

$$= \; E \cap (S\backslash A) \cup (E \cap B \cap A)$$

und der σ-Subadditivität:

$$\alpha(E \cap (S\backslash(A\backslash B))) \;\leq\; \alpha(E \cap B \cap A) \;+\; \alpha(E \cap (S\backslash A)).$$

Umgekehrt gilt auch wegen der σ-Subadditivität

$$\alpha(E) \;\leq\; \alpha(E \cap (A\backslash B)) \;+\; \alpha(E \cap (S\backslash(A\backslash B))),$$

also $A\backslash B \in \mathcal{M}_\alpha$.

(3) Wir zeigen nun, daß mit $A_n \in \mathcal{M}_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, auch $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_\alpha$ gilt, und $\alpha|\mathcal{M}_\alpha$ σ–additiv ist. Für $E \subseteq S$ gilt

$$\begin{aligned}
\alpha(E) &= \alpha(E \cap A_1) + \alpha(E \cap (S \setminus A_1)) \\
&= \alpha(E \cap A_1) + \alpha(E \cap (S \setminus A_1) \cap A_2) + \alpha(E \cap (S \setminus A_1) \cap (S \setminus A_2)) \\
&= \alpha(E \cap A_1) + \alpha(E \cap A_2) + \alpha(E \cap (S \setminus (A_1 \cup A_2))),
\end{aligned}$$

da $A_2 \subseteq S \setminus A_1$ $(A_1 \cap A_2 = \emptyset)$. Fährt man so fort, erhält man

$$\begin{aligned}
\alpha(E) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha(E \cap A_i) + \alpha\left(E \cap \left(S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \alpha(E \cap A_i) + \alpha(E \cap (S \setminus A)) \quad \text{da } A \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i.
\end{aligned}$$

Mit $n \to \infty$ und der σ–Subadditivität gilt

$$\alpha(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(E \cap A_i) + \alpha(E \cap (S \setminus A)) \geq \alpha(E \cap A) + \alpha(E \cap (S \setminus A)).$$

Da die entgegengesetzte Ungleichung immer gilt, hat man $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}_\alpha$. Weiter hat man eben gezeigt:

$$\alpha(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(E \cap A_i) + \alpha(E \cap (S \setminus A)).$$

Setzt man speziell $E = E \cap A$ so erhält man

$$\alpha\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(E \cap A_i). \qquad (\star)$$

Setzt man $E = S$, so folgt die σ–Additivität von $\alpha|\mathcal{M}_\alpha$.

(4) Bleibt zu zeigen, daß mit $B_n \in \mathcal{M}_\alpha$ (nicht notwendigerweise paarweise disjunkt) auch $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}_\alpha$ gilt. Mit $B_1 \cup B_2 = B_1 \cup (B_2 \setminus B_1)$ und $B_1 \in \mathcal{M}_\alpha$, $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{M}_\alpha$ (wegen (2)) ist $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}_\alpha$, also $\mathcal{M}_\alpha$ eine Algebra. Setze schließlich

$$A_1 = B_1,\ A_n = B_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i\right).$$

Damit gilt $A_n \in \mathcal{M}_\alpha$, A_n sind paarweise disjunkt. Mit (3) folgt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_\alpha.$$

$\diamond$

Satz 1.16 (Carathéodory)
Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein Inhalt, der (M5) erfüllt. (μ heißt dann Prämaß). Dann gilt:
Jedes $A \in \mathcal{R}$ ist μ^*-messbar, und es ist $\mu^*(A) = \mu(A)$. D.h. $\mu^*|\mathcal{M}_{\mu^*}$ ist eine Fortsetzung von μ auf die σ-Algebra $\mathcal{M}_{\mu^*}$. Insbesondere ist $\mu^*|\sigma(\mathcal{R})$ eine Fortsetzung von μ auf die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$. Hinsichtlich der Eindeutigkeit gilt: Ist μ auf $\mathcal{R}$ σ-endlich, d.h. es gibt eine aufsteigende Folge $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$ von Mengen in $\mathcal{R}$ mit $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Fortsetzung von μ eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $\mathcal{R}$ ein Ring. Sei $A \in \mathcal{R}$. Um zu zeigen, daß $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, reicht es zu zeigen

$$\mu^\star(E) \geq \mu^\star(E \cap A) + \mu^\star(E \cap (S \setminus A)) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{P}(S)$$

Ist $\mu^\star(E) = \infty$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\mu^\star(E) < \infty$. Zu $\epsilon > 0$ existieren $E_n \in \mathcal{R}$ mit $E \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ und

$$\mu^\star(E) + \epsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Da $E \cap A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \cap A$, $E \cap (S \setminus A) \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \cap (S \setminus A)$ und $E_n \cap A \in \mathcal{R}$, $E_n \cap (S \setminus A) \in \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ ist ein Ring), folgt

$$\begin{aligned} \mu^\star(E \cap A) + \mu^\star(E \cap (S \setminus A)) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(E_n \cap A) + \mu(E_n \cap (S \setminus A))) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu^\star(E) + \epsilon. \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $A \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Damit ist $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^\star}$ gezeigt. Da $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ eine σ–Algebra ist, folgt $\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$. Ist μ σ–additiv auf $\mathcal{R}$, d.h. sind $A_n \in \mathcal{R}$ und $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, so gilt $\mu(A) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Insbesondere gilt mit der Monotonie von μ

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \qquad \text{für alle } B_n \in \mathcal{R},\ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

und damit $\mu(A) \leq \mu^\star(A)$. Offensichtlich gilt für $A \in \mathcal{R}$ immer $\mu^\star(A) \leq \mu(A)$ (Setze $A_1 = A$ und $A_n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ bei der Infimum–Bildung). Zusammen gilt: $\mu^\star|\mathcal{R} = \mu$.

Den Beweis der Eindeutigkeit lassen wir weg. $\diamond$

Kehrt man zu $S = \mathbb{R}^d$ und den Mengensystemen $\mathcal{A}_0$ und $\mathcal{A}_1$ zurück, so kann man die vorherigen Ergebnisse zusammenfassen.

Satz 1.17 *Es gibt genau ein Maß $m : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, das den halboffenen Quadern Q den Inhalt $m(Q) = \prod\limits_{k=1}^{d} (b_k - a_k)$ zuordnet. m ist sogar auf der*

σ-Algebra $\mathcal{A}_L := \mathcal{M}_{m^*}$ der Lebesgue-messbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^d$ als Maß definiert. Jede offene oder abgeschlossene Menge des $\mathbb{R}^d$ ist Lebesgue-messbar. Jede kompakte Menge des $\mathbb{R}^d$ ist Lebesgue-messbar und hat endliches Lebesguesches Maß.

Bemerkung: Wir wollen noch eine weitere Eigenschaft des Lebesgueschen Maßes hervorheben. Für jede Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt:

$$m(A) \;=\; \inf\{m(U) : \; A \subseteq U,\; U \text{ offen}\} \;=\; \sup\{m(C) : \; C \subseteq A,\; C \text{ kompakt}\}.$$

2 Lebesguesches Integral

Wir haben nun die σ-Algebra $\mathcal{A}_L$ und das zugehörige Lebesgue-Maß konstruiert, und können nun die zugehörige Integration entwickeln. Die Funktionen, die wir integrieren werden, sind von der Form $f : A \to \mathbb{R}^m,\; A \subseteq \mathbb{R}^d$. Meistens wird $m = 1$ sein.

Die **Schwankung** $\sigma(f, A)$ von f auf A definieren wir durch

$$\sigma(f, A) := \sup_{x,y \in A} \|f(y) - f(x)\|_2$$

wobei $\sigma(f, A) = \infty$ auch zugelassen ist.

Ist $A \in \mathcal{A}_L$ Lebesgue-messbar, so heißt $\mathcal{Z} \;= \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **Zerlegung** von A, falls $A_n \in \mathcal{A}_L$, paarweise disjunkt, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ und $m(A_n) < \infty$.

Sind bei einer Zerlegung $\mathcal{Z} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von A alle $\sigma(f, A_n) < \infty$, so heißt

$$S(f, \mathcal{Z}) := \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(f, A_n)\, m(A_n)$$

Schwankungssumme von f bzgl. $\mathcal{Z}$.

Definition 2.1 *Sei $f : A \to \mathbb{R}^m,\; A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Abbildung. f heißt* **messbar** *(genauer Lebesgue-messbar), falls für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ das Urbild*

$$f^{-1}(U) \;= \{x \in A : \; f(x) \in U\}$$

messbar ist.

Lemma 2.2 *Sei $f : A \to \mathbb{R}^m,\; A \subset \mathbb{R}^d,\; A$ messbar. Äquivalent sind:*

(i) f ist messbar.

(ii) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von A mit

$$S(f, \mathcal{Z}) \;\le \epsilon.$$

Beweis. Gelte (i), und sei $\epsilon > 0$. Sei $\mathbb{R}^d = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$, Q_n halboffene disjunkte Einheitswürfel, also $m(Q_n) = 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ übedecken wir den Bildraum $\mathbb{R}^m$ durch Folgen $(C_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$, $C_{n,j}$ offene Kreisscheiben mit Durchmesser $\frac{\epsilon}{2^n}$. Definiere nun (bei festem n) messbare Mengen

$$A_{n,1} := \{x \in A \cap Q_n : f(x) \in C_{n,1}\} = f^{-1}(C_{n,1}) \cap Q_n$$

und induktiv

$$\begin{aligned} A_{n,j} &:= \{x \in A \cap Q_n : f(x) \in C_{n,j},\ f(x) \notin C_{n,i} \text{ für } i < j\} \\ &= (f^{-1}(C_{n,j}) \cap Q_n) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} A_{n,i} \right) \end{aligned}$$

Dann gilt $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{n,j} = A \cap Q_n$ (paarweise disjunkt) und (bei laufendem n) bildet $\mathcal{Z} = \{A_{n,j}\}_{n,j\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung von A. Ferner gilt $\sigma(f, A_{n,j}) \leq \epsilon/2^n$, (da der Durchmesser von $C_{n,j} = \frac{\epsilon}{2^n}$ ist), also

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{Z}) &= \sum_{n,j=1}^{\infty} \sigma(f, A_{n,j})\, m(A_{n,j}) \\ &\leq \sum_{n,j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n}\, m(A_{n,j}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} \sum_{j=1}^{\infty} m(A_{n,j}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} m(A \cap Q_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon. \end{aligned}$$

Gelte nun (ii) und sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z}_n = \{A_{n,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ von A mit $S(f, \mathcal{Z}_n) \leq \frac{1}{n}$. Bezeichne

$$B := \bigcup_{\substack{j,n\in\mathbb{N} \\ f(A_{n,j})\subseteq U}} A_{n,j}.$$

B ist messbar (als abzählbare Vereinigung messbarer Mengen) und es gilt $B \subseteq f^{-1}(U)$.

Wir zeigen: $f^{-1}(U)\setminus B$ ist Nullmenge $(*)$,
und somit messbar, wegen Satz 1.15(c). Dann ist auch $f^{-1}(U) = (f^{-1}(U)\setminus B) \cup B$ messbar, was zu zeigen ist.

Dazu bezeichne

$$U_j := \{y \in U : U_{\frac{1}{j}}(y) \subseteq U\}.$$

Da U offen ist, gilt $U = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} U_j$. Wir zeigen in Abwandlung von $(*)$:

$$\bar{m}\,(f^{-1}(U_j)\setminus B) := \inf\{m(C) : f^{-1}(U_j)\setminus B \subseteq C,\ C \in \mathcal{A}_L\} = 0 \qquad (**)$$

Dann ist $f^{-1}(U_j)\backslash B$ eine messbare Nullmenge, und dann auch $f^{-1}(U)\backslash B$.

Betrachte die Zerlegung $\{A_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{n,i}$. Ist $x \in f^{-1}(U_j)\backslash B$ und $x \in A_{n,i}$, so muß $\sigma(f, A_{n,i}) \geq \frac{1}{j}$ sein, denn sonst wäre $f(A_{n,i}) \subseteq U_{\frac{1}{j}}(f(x)) \subseteq U$ und damit gilt $x \in A_{n,i} \subseteq B$.

Wegen

$$S(f, \mathcal{Z}_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(f, A_{n,i})\, m(A_{n,i}) \leq \frac{1}{n}$$

kann nur gelten

$$m\left(\bigcup_{\substack{i=1 \\ \sigma(f,A_{n,i})\geq \frac{1}{j}}}^{\infty} A_{n,i} \right) \leq \frac{j}{n}$$

(denn " $> \frac{j}{n}$ " würde $S(f, \mathcal{Z}_n) > \frac{1}{n}$ als Folge haben). Damit gilt $\bar{m}(f^{-1}(U_j)\backslash B) \leq \frac{j}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und folglich haben wir $(**)$. $\diamond$

Wir können nun analog zur Riemannschen Näherungssumme vorgehen. Ist $\mathcal{Z} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung von $A \in \mathcal{A}_L$, und $x_n \in A_n$ ausgewählt, so bezeichne

$$R(f, \mathcal{Z}) := \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\, m(A_n)$$

Diese Reihen konvergieren im allgemeinen nicht. Falls doch, können sie von $\mathcal{Z}$ und der Wahl der x_n abhängen. Wir werden nur die Situationen betrachten, bei denen absolute Konvergenz vorliegt (d.h. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f(x_n)\|_2\, m(A_n) < \infty$).

Lemma 2.3 *Sei $f : A \to \mathbb{R}^m$ messbar, $A \subseteq \mathbb{R}^d$, und zu $\epsilon > 0$ sei $\mathcal{Z} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung von A mit $S(f, \mathcal{Z}) \leq \epsilon$. Aus jedem A_n seien zwei Punkte $x_n, x'_n \in A_n$ gewählt. Wenn von den beiden Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x_n)m(A_n)$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x'_n)m(A_n)$ eine absolut konvergiert, so auch die andere, und es gilt*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\, m(A_n) - \sum_{n=1}^{\infty} f(x'_n)\, m(A_n) \right\|_2 \leq \epsilon.$$

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|f(x_n)\, m(A_n) - f(x'_n)\, m(A_n)\|_2 = \|f(x'_n) - f(x_n)\|_2\, m(A_n) \leq \sigma(f, A_n)\, m(A_n),$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f(x_n)\, m(A_n) - f(x'_n)\, m(A_n)\|_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(f, A_n)\, m(A_n) = S(f, \mathcal{Z}) \leq \epsilon.$$

Damit folgt die Behauptung. $\diamond$

Ähnlich wie in Analysis II heißt eine Zerlegung $\mathcal{Z}' = \{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ **feiner** als $\mathcal{Z} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, falls jedes B_j Teilmenge eines A_n ist.

Lemma 2.4

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar, $f : A \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Ist die Zerlegung $\mathcal{Z}' = \{A'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von A feiner als $\mathcal{Z} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt für die Schwankungssummen

$$S(f, \mathcal{Z}') \ \leq \ S(f, \mathcal{Z}).$$

(b) Ist $f : A \to \mathbb{R}^m$ messbar und sind $\mathcal{Z}'$ und $\mathcal{Z}$ zwei Zerlegungen von A und $S(f, \mathcal{Z}) < \infty$ und $S(f, \mathcal{Z}') < \infty$, und konvergiert eine der Näherungssummen $R(f, \mathcal{Z})$ und $R(f, \mathcal{Z}')$ absolut, so konvergiert auch die andere, und es gilt

$$\|R(f, \mathcal{Z}) \ - \ R(f, \mathcal{Z}')\|_2 \ \leq \ S(f, \mathcal{Z}) \ + \ S(f, \mathcal{Z}').$$

Beweis.

(a) Wir haben

$$S(f, \mathcal{Z}') \ = \ \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(f, A'_j)\, m(A'_j) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ B_j \subseteq A_n}}^{\infty} \sigma(f, A_n)\, m(B_j)$$

$$= \ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(f, A_n)\, m(A_n) \ = \ S(f, \mathcal{Z}).$$

(b) Sei zunächst vorausgesetzt, daß $\mathcal{Z}' = \{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ feiner ist als $\mathcal{Z}$. Dann gilt mit der gröberen Zerlegung $\mathcal{Z} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $x_n \in A_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f(x_n)\|_2\, m(A_n) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \|f(x_n)\|_2 \sum_{\substack{j=1 \\ B_j \subseteq A_n}}^{\infty} m(B_j) \ = \ \sum_{\substack{n,j=1 \\ B_j \subseteq A_n}}^{\infty} \|f(x_n)\|_2\, m(B_j),$$

falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f(x_n)\|_2 m(A_n)$ konvergiert oder letztere Reihe konvergiert (Umordnungssatz). Insbesondere gilt dann im $\mathbb{R}^m$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\, m(A_n) \ = \ \sum_{\substack{n,j=1 \\ B_j \subseteq A_n}}^{\infty} f(x_n)\, m(B_j) \ =: A$$

Letztere Reihe vergleichen wir nun mit einer Näherungssumme $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f(x'_j) m(B_j)$ bzgl. $\mathcal{Z}' = \{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}, \ \ x'_j \in B_j$:

$$\sum_{\substack{n,j=1 \\ B_j \subseteq A_n}}^{N,J} \|f(x_n) - f(x'_j)\|_2\, m(B_j) \ \leq \ \sum_{\substack{n,j=1 \\ B_j \subseteq A_n}}^{N,J} \sigma(f, A_n)\, m(B_j)$$

$$\leq \ \sum_{n=1}^{N} \sigma(f, A_n)\, m(A_n) \ \leq \ S(f, \mathcal{Z}) \qquad\qquad (N, J \in \mathbb{N}).$$

Hieraus folgt: Konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x_n)m(A_n)$ oder $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f(x'_j)m(B_j)$ absolut, so konvergieren beide Reihen absolut. (Ebenso die Reihe $\sum\limits_{\substack{n,j=1 \\ B_j \subseteq A_n}}^{\infty} f(x_n)m(B_j)$). Außerdem gilt dann die Abschätzung

$$\|R(f,\mathcal{Z}) \;-\; R(f,\mathcal{Z}')\|_2 \;\leq\; S(f,\mathcal{Z}) \;+\; S(f,\mathcal{Z}'),$$

wobei letzteres auch gilt, falls $\mathcal{Z}'$ nicht feiner als $\mathcal{Z}$ ist.

$\diamond$

Definition 2.5 *Sei $f : A \to \mathbb{R}^m$ messbar, $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Wir setzen voraus, daß $R(f,\mathcal{Z}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x_n)m(A_n)$, $x_n \in A_n$, absolut konvergiert für alle Zerlegungen $\mathcal{Z} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von A mit $S(f,\mathcal{Z}) < \infty$. Wir sagen dazu: f ist* **integrierbar***, genauer: f is Lebesgue-integrierbar.*

Ist $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, ...$ eine Folge von Zerlegungen von A, die immer feiner werden, mit $\lim\limits_{i\to\infty} S(f,\mathcal{Z}_i) = 0$, so heißt

$$\int_A f(x)\,dx := \int_A f(x_1,...,x_n)\,dx_1\cdots x_n := \lim_{i\to\infty} R(f,\mathcal{Z}_i)$$

das **Lebesguesche Integral** *von f über A. (Mit Lemma 2.2 existiert eine derartige Zerlegungsfolge).*

Bemerkungen: Nach Lemma 2.4 (b) existiert dieser Limes, denn es gilt

$$\|R(f,\mathcal{Z}_i) \;-\; R(f,\mathcal{Z}_j)\|_2 \;\leq\; S(f,\mathcal{Z}_i) \;+\; S(f,\mathcal{Z}_j) \;\to 0$$

mit $i,j \to \infty$, d.h. $(R(f,\mathcal{Z}_i))_{i\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge im $\mathbb{R}^m$.

Der Grenzwert $\int\limits_A f(x)dx$ ist von der Wahl der Zerlegungsfolge unabhängig. Ist $\mathcal{Z}'_1, \mathcal{Z}'_2, ...$ eine zweite Folge mit $\lim\limits_{j\to\infty} S(f,\mathcal{Z}_j) = 0$, so folgt wieder mit Lemma 2.4 (b)

$$\|R(f,\mathcal{Z}_i) \;-\; R(f,\mathcal{Z}'_j)\|_2 \;\leq\; S(f,\mathcal{Z}_i) \;+\; S(f,\mathcal{Z}'_j) \;\to 0$$

mit $i,j \to \infty$. Mit Lemma 2.3 ist der Grenzwert auch unabhängig von der Wahl der $x_n \in A_n$.
Hiermit ist die gegebene Definition sinnvoll.

Wie für das Regel-Integral und das Riemann-Integral gelten folgende Rechenregeln:

(1) Sind $f : A \to \mathbb{R}^m$, $g : A \to \mathbb{R}^m$ integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha f + \beta g : A \to \mathbb{R}^m$ integrierbar, und es gilt

$$\int_A (\alpha f(x) \;+\; \beta g(x))\,dx \;=\; \alpha \int_A f(x)\,dx \;+\; \beta \int_A g(x)\,dx.$$

Die Integrierbarkeit von $\alpha f + \beta g$ ist offensichtlich mit den entsprechenden Aussagen zur absoluten Konvergenz.

Seien desweiteren $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathcal{Z}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ feiner werdende Zerlegungsfolgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,\mathcal{Z}_n) = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} S(g,\mathcal{Z}'_n)$.

Betrachte eine gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{Z}''_n$ von $\mathcal{Z}_n$ und $\mathcal{Z}'_n$. Dann gilt mit Lemma 2.4 (a)

$$\begin{aligned} S(\alpha f + \beta g, \mathcal{Z}''_n) &\leq |\alpha|\, S(f,\mathcal{Z}''_n) \;+\; |\beta|\, S(g,\mathcal{Z}''_n) \\ &\leq |\alpha|\, S(f,\mathcal{Z}_n) \;+\; |\beta|\, S(g,\mathcal{Z}'_n) \;\to 0. \end{aligned}$$

Da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$R(\alpha f + \beta g, \mathcal{Z}''_n) \;=\; \alpha R(f,\mathcal{Z}''_n) \;+\; \beta R(g,\mathcal{Z}''_n),$$

folgt durch Übergang zum Grenzwert

$$\int_A (\alpha f(x) \;+\; \beta g(x))\, dx \;=\; \alpha \int_A f(x)\, dx \;+\; \beta \int_A g(x)\, dx.$$

(2) Seien $A, B \in \mathcal{A}_L$ mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gilt:
$f: A\cup B \to \mathbb{R}^m$ ist integrierbar genau dann, wenn $f|A:\ A \to \mathbb{R}^m$ und $f|B:\ B \to \mathbb{R}^m$ integrierbar sind. Es gilt dann:

$$\int_{A\cup B} f(x)\, dx \;=\; \int_A f(x)\, dx \;+\; \int_B f(x)\, dx.$$

Vergleiche mit Übungen.

(3) Seien $f: A \to \mathbb{R},\ g: A \to \mathbb{R}$ integrierbar. Gilt $f \leq g$, so folgt

$$\int_A f(x)\, dx \;\leq\; \int_B g(x)\, dx.$$

Dies folgt sofort aus der entsprechenden Ungleichung für die Näherungssummen.

(4) Ist $f: A \to \mathbb{R}^m$ messbar bzw. integrierbar, so ist auch $g: A \to \mathbb{R},\ g(x) := \|f(x)\|_2$ messbar bzw. integrierbar. Ist $f: A \to \mathbb{R}^m$ integrierbar, so gilt

$$\| \int_A f(x)\, dx \|_2 \;\leq\; \int_A \|f(x)\|_2\, dx$$

Nachweis von (4): Für jede Teilmenge $B \subseteq A$ gilt mit der Dreiecksungleichung $\sigma(g,B)\ \leq \sigma(f,B)$. Damit gilt für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von A

$$S(g,\mathcal{Z}) \;\leq\; S(f,\mathcal{Z})$$

Mit Lemma 2.2 folgt aus der Messbarkeit von f diejenige von $g = \|f\|_2$. Setzt man die Messbarkeit von $f: A \to \mathbb{R}^m$ voraus, so folgt (weil wir absolute Konvergenz der Näherungssummen verlangen):

f integrierbar genau dann, wenn $g = \|f\|_2$ integrierbar.

(Man beachte: Aus der Messbarkeit von $\|f\|_2$ folgt im allgemeinen nicht die Messbarkeit von f).

Bleibt die Ungleichung zu zeigen:

Für $f : A \to \mathbb{R}$ $(m = 1)$ gilt $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$. Die Behauptung folgt in diesem Fall aus (3) und (1).

Im allgemeinen Fall $(m \geq 2)$ seien $\mathcal{Z}_1 = (A_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{Z}_2 = (A_{2,k})_{k\in\mathbb{N}}, ..., \mathcal{Z}_n = (A_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}, ...$ feiner werdende Zerlegungen mit $S(f, \mathcal{Z}_n) \to 0$ mit $n \to \infty$. Dann gilt $S(g, \mathcal{Z}_n) \to 0$ und für Partialsummen in den Näherungssummen gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} f(x_{n,k})\, m(A_{n,k}) \right\|_2 \leq \sum_{k=1}^{K} \|f(x_{n,k})\|_2\, m(A_{n,k})$$

mit $x_{n,k} \in A_{n,k}$ für alle $K \in N$, $n \in \mathbb{N}$. Mit $K \to \infty$ folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\|R(f, \mathcal{Z}_n)\|_2 \leq R(g, \mathcal{Z}_n).$$

Mit $n \to \infty$ folgt dann die behauptete Ungleichung.

(5) Ist $f : A \to \mathbb{R}^m$ messbar, $g : A \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $\|f(x)\|_2 \leq g(x)$ für alle $x \in A$, so ist auch f integrierbar (Majoranten-Kriterium).

Dazu sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung mit $S(f, \mathcal{Z}) < \infty$ und $S(g, \mathcal{Z}) < \infty$. Mit $\|f(x_k)\, m(A_k)\|_2 \leq g(x_k)\, m(A_k)$ folgt sofort die Behauptung mit dem Majoranten-Kriterium für Reihen.

Zur Messbarkeit und Integrierbarkeit konkreter Funktionsklassen erwähnen wir:

Satz 2.6 *Sei $A \in \mathcal{A}_L$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann ist f messbar.*

Beweis. Urbilder offener Mengen sind offen, falls f stetig ist (Analysis I, Satz 8.4), also Lebesgue-messbar. Das heißt, f ist messbar. $\diamond$

Satz 2.7 *Sei $A \in \mathcal{A}_L$, $m(A) < \infty$. Ist $f : A \to \mathbb{R}^m$ messbar und beschränkt, so ist f integrierbar, und es gilt*

$$\left\| \int_A f(x)\, dx \right\|_2 \leq \|f\|_\infty\, m(A).$$

Beweis. Sei $g : A \to \mathbb{R}$, $g(x) = c$ konstant. g ist integrierbar, und es gilt $\int_A g(x)\, dx = c\, m(A)$. Aus (5) und (4) folgt die Behauptung. $\diamond$

Korollar 2.8 *Sei $A \in \mathcal{A}_L$, $m(A) < \infty$. Ist $f : A \to \mathbb{R}^m$ stetig und beschränkt, so ist f integrierbar, und es gilt*

$$\left\| \int_A f(x)\, dx \right\|_2 \leq \|f\|_\infty\, m(A)$$

Insbesondere gilt: Ist $A \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, $f : A \to \mathbb{R}^m$ stetig, so ist f integrierbar, und es gilt obige Ungleichung.

Ist $A = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ R-integrierbar, so betrachtet man dort endliche Zerlegungen $\mathcal{Z}$ bestehend aus Intervallen, und bildet einen analogen Grenzprozeß. Wir halten fest

Satz 2.9 *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar, so ist f integrierbar im Sinne von Definition 2.5, und das Riemann-Integral und Lebesguesche Integral stimmen überein. (Wir schreiben auch:*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad)$$

Bemerkung: In Ergänzung zu Satz 2.9 sei angemerkt, daß es Lebesgue-integrierbare Funktionen auf $[a,b]$ gibt, die nicht R-integrierbar sind, siehe Blatt 4, T12.

3 Grenzwertsätze für das Lebesguesche Integral

Das Lebesguesche Integral verhält sich hinsichtlich Grenzwertsätzen wesentlich einfacher als das Riemann-Integral.

Satz 3.1 *Seien $f_n : A \to \mathbb{R}^m$ messbare Funktionen, so daß für jedes $x \in A$ der Grenzwert $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert (punktweise Konvergenz im $\mathbb{R}^m$). Dann ist die Funktion $f : A \to \mathbb{R}^m$ auch messbar.*

Beweis. Wir zeigen $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}_L$ für $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

Sei $x \in f^{-1}(U)$, also $f(x) \in U$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, so daß $f_n(x) \in U$ für $n \geq N$. Somit ist

$$x \in \bigcap_{n=N}^{\infty} f_n^{-1}(U),$$

und folglich für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ (aber zunächst fest)

$$f^{-1}(U) \overset{(a)}{\subseteq} \bigcup_{N=k}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} f_n^{-1}(U) \subseteq \bigcup_{N=k}^{\infty} f_N^{-1}(U)$$

Ist nun $B \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen, so ist $U = \mathbb{R}^m \backslash B$ offen, und so gilt auch

$$f^{-1}(\mathbb{R}^m \backslash B) \subseteq \bigcup_{N=k}^{\infty} f_N^{-1}(\mathbb{R} \backslash B).$$

Bildet man die Komplemente, so folgt

$$f^{-1}(B) \supseteq \bigcap_{N=k}^{\infty} f_N^{-1}(B) \qquad \text{für beliebiges } k \in \mathbb{N},$$

also

$$f^{-1}(B) \overset{(b)}{\supseteq} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=k}^{\infty} f_N^{-1}(B).$$

Da diese Relationen echt sein können, müssen wir U noch zerlegen.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Setze $U_n := \{x \in U : U_r(x) \subseteq U \text{ mit } r > \frac{1}{n}\}$. U_n ist offen, denn mit $x \in U_n$ gilt $U_{\frac{1}{2}(r-\frac{1}{n})}(x) \subseteq U_n$. Außerdem gilt (da U offen ist) auch $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$.

Es gilt auch: Für jedes $x \in U_n$ gilt $U_{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}(x) \overset{(*)}{\subseteq} U_{n+1}$. Dazu zeigen wir: Ist $y \in U_{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}(x)$, so gilt $U_{r'}(y) \subseteq U_r(x) \subseteq U$, wobei $r' - \frac{1}{n+1} < r - \frac{1}{n}$ mit $r' > \frac{1}{n+1}$ und $r > \frac{1}{n}$ mit $U_r(x) \subseteq U$ ist. Ist also $z \in U_{r'}(y)$, so gilt $d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < r' + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} + \left(r' - \frac{1}{n+1}\right) < r$.

Mit $(*)$ folgt $B_n := \overline{U_n} \overset{(**)}{\subseteq} U_{n+1}$. Ist nämlich $y \in \overline{U_n},\ y = \lim\limits_{k\to\infty} y_k,\ \ y_k \in U_n$, so liegt y in $U_{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}(y_k),\ \ k$ groß genug, und somit $y \in U_{n+1}$ mit $(*)$.

Fassen wir alles zusammen, so folgt mit (a) und (b) für U_j bzw. B_j

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) \ &= \ \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(U_j) \overset{(a)}{\subseteq} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} f_n^{-1}(U_j) \\ &\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} f_n^{-1}(B_j) \overset{(b)}{\subseteq} \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(B_j) \\ &\overset{(**)}{\subseteq} \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(U_{j+1}) \ \subseteq \ f^{-1}(U). \end{aligned}$$

Da Anfangs- und Endterm in dieser Inklusionskette gleich sind, gilt an jeder Stelle Gleichheit. Insbesondere gilt

$$f^{-1}(U) \ = \ \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} f_n^{-1}(U_j) \ \in \mathcal{A}_L,$$

da alle f_n messbar sind. $\diamond$

Wir führen allgemein folgende Sprechweise ein:

Eine Eigenschaft gilt **fast überall in $\boldsymbol{A}$** $\in \mathcal{A}_L$ (oder gilt **für fast alle $\boldsymbol{x \in A}$** $\in \mathcal{A}_L$), wenn es eine Nullmenge B gibt derart, daß die Eigenschaft für alle $x \in A \backslash B$ gilt.

Eine wichtige Anwendung hierfür ist:

$f, g : A \to \mathbb{R}^m$ stimmen fast überall in A überein,
und ist f integrierbar, so ist auch g integrierbar, und es gilt

$$\int_A f(x)\, dx \ = \ \int_A g(x)\, dx$$

Dies folgt aus

$$\int_{A\cup B} f(x)\, dx \ = \int_A f(x)\, dx \ + \int_B f(x)\, dx \qquad \text{(vgl (2), §2)}$$

und der Tatsache: Ist B Nullmenge, f irgendeine $\mathbb{R}^m$-wertige Funktion, so ist f (über B) integrierbar und $\int\limits_B f(x)\, dx \ = 0$.

Diese Anmerkung läßt sich auch so formulieren: Ist $f : A \to \mathbb{R}^m$ nur fast überall definiert, so kann man f dennoch unter Umständen integrieren: Man setze f irgendwie auf ganz A fort. Bezeichnet $g : A \to \mathbb{R}^m$ nun diese überall definierte Funktion und ist g integrierbar, so hängt $\int\limits_A g(x)\, dx$ nicht von der gewählten Fortsetzung ab, und wir bezeichnen dessen Wert mit $\int\limits_A f(x)\, dx$.

Nochmals etwas anders ausgedrückt unterscheiden wir bei integrierbaren Funktionen nicht mehr zwischen Funktionen, die sich auf Nullmengen unterscheiden. Wir betrachten Äquivalenzklassen von Funktionen, wobei $f \sim g \Longleftrightarrow f = g$ fast überall in A gilt.

Der erste wichtige Konvergenzsatz geht auf Beppo Levi (1875-1961, Bologna) zurück. Er bezieht sich auf reellwertige Funktionen.

Satz 3.2 (Satz von der monotonen Konvergenz)
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar. Die Funktionen $f_n : A \to \mathbb{R}$ seien monoton steigend und nicht negativ, d.h. $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ für alle $x \in A$. Ferner seien alle f_n integrierbar, und die Folge der Integrale $\int\limits_A f_n(x)\,dx$ bilde eine beschränkte Menge in $\mathbb{R}$. Dann gelten:

(1) Die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist für fast alle $x \in A$ beschränkt.

(2) Die Grenzfunktion $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (fast überall definiert!) ist integrierbar, und es gilt

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A f_n(x)\,dx$$

Beweis.

Zu (1): Bezeichne

$$s := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx. \qquad \text{(Vergleiche hierzu §2 (3))}$$

Für $c > 0$ setze $A_n(c) := \{x \in A : f_n(x) > c\}$. Schreibe

$$g(x) = c\chi_{A_n(c)}(x) = \begin{cases} c & x \in A_n(c) \\ 0 & x \in A \backslash A_n(c) \end{cases}.$$

Mit $g \leq f_n$ folgt

$$c\, m(A_n(c)) = \int_A g(x)\,dx \leq \int_A f_n(x)\,dx \leq s.$$

Nun ist

$$A(c) := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(c) = \{x \in A : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ nicht beschränkt durch } c\}$$

und $A_n(c) \subseteq A_{n+1}(c)$. Folglich

$$m\,(A(c)) = \lim_{n\to\infty} m\,(A_n(c)) \leq \frac{s}{c}$$

Da $\bigcap\limits_{c>0} A(c) = \{x \in A : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ unbeschränkt}\}$, gilt

$$m(\{x \in A : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ unbeschränkt}\}) = 0$$

Zu (2): Wir wissen also $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für fast alle $x \in A$.
Für das weitere Vorgehen nehmen wir diese Nullmenge B aus A einfach heraus, und können o.E. annehmen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in A$ (betrachte $A\backslash B$ statt A). Dann ist f messbar gemäß Satz 3.1.

Für $q > 1$ und $l \in \mathbb{Z}$ bezeichne wie bisher $A_n(q^l) = \{x \in A : f_n(x) > q^l\}$ und $A(q^l) = \{x \in A : f(x) > q^l\}$ und setze

$$B_l := A(q^l)\backslash A(q^{l+1}) = \{x \in A : q^l < f(x) \leq q^{l+1}\}.$$

Wir haben bereits gezeigt $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n(c)) = m(A(c))$ für jedes $c > 0$, woraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} m\left(A_n(q^l)\backslash A_n(q^{l+1})\right) = m\left(B_l\right) \qquad \text{für alle } l \in \mathbb{Z}.$$

Nun ist $\mathcal{Z} = \{B_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ eine Zerlegung von A. Für festes $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ setze

$$g(x) := \begin{cases} q^l & \text{falls} \quad x \in A_n(q^l)\backslash A_n(q^{l+1}) \\ & \qquad \text{für } l = -k, .., k \\ 0 & \text{falls} \quad x \in A\backslash \bigcup\limits_{l=-k}^{k} A_n(q^l)\backslash A_n(q^{l+1}) \, . \end{cases}$$

Da $g \leq f_n$ ist, folgt

$$\sum_{l=-k}^{k} q^l \, m\left(A_n(q^l)\backslash A_n(q^{l+1})\right) \leq \int_A f_n(x)\, dx \leq s.$$

Mit $n \to \infty$ (bei festem $k \in \mathbb{N}$) erhält man

$$\sum_{l=-k}^{k} q^l \, m(B_l) \leq s.$$

Betrachten wir nun die Näherungssummen von f bzgl. $\mathcal{Z}$, so hat man (mit $x_l \in B_l$)

$$R(f, \mathcal{Z}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(x_l)\, m(B_l) \leq \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{l+1} m(B_l) \leq q\, s.$$

Folglich ist f integrierbar, und da $q > 1$ beliebig war, folgt

$$\int_A f(x)\, dx \leq s = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, dx$$

Da aber auch $\int\limits_A f(x)\, dx \geq \int\limits_A f_n(x)\, dx$ (da $f_n \leq f$) folgt die Behauptung.

◇

Bemerkung: Die Voraussetzung $f_1(x) \geq 0$ ist nicht essentiell. Man ersetze, falls die übrigen Voraussetzungen erfüllt sind, $f_n(x)$ durch $f_n(x) - f_1(x)$.

Korollar 3.3 (Levi)
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar. Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ integrierbarer Funktionen $f_n : A \to [0,\infty[$ mit $\left\{ \int\limits_A \left(\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x) \right) dx : \; N \in \mathbb{N} \right\}$ ist beschränkt, gilt:

(1) $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x) \right)_{N\in\mathbb{N}}$ *ist für fast alle $x \in A$ beschränkt.*

(2) Die Reihe $f(x) \;=\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ist integrierbar, und es gilt

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \, dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x) \, dx.$$

Beweis. Setze $g_N(x) \;=\; \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$ und wende Satz 3.2 auf $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an. $\diamond$

Wir wissen, daß mit f, g messbar bzw. integrierbar auch $af + bg$ messbar bzw.integrierbar ist. Ebenso ist mit f auch $\|f\|_2$ messbar bzw. integrierbar. Für reellwertige Funktionen folgt damit auch, daß mit f, g messbar bzw. integrierbar auch $\max\{g, h\}$ und $\min\{g, h\}$ messbar bzw. integrierbar sind. (Beachte: $\max\{g, h\} \;=\; \dfrac{g+h}{2} + \dfrac{|g-h|}{2}$.)

Der zweite wichtige Grenzwertsatz geht auf H.Lebesgue zurück, er wird der Satz von der majorisierten Konvergenz genannt.

Satz 3.4 (Lebesgue)
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar. Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen $f_n : A \to \mathbb{R}^m$ und $g : A \to \mathbb{R}$ eine reellwertige integrierbare Funktion mit $\|f_n\|_2 \leq g(x)$ für fast alle $x \in A$. Ferner konvergiere $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert $f(x)$ für fast alle $x \in A$. Dann ist die Grenzfunktion $f : A \to \mathbb{R}^m$ integierbar, und es gilt

$$\int_A f(x) \, dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x) \, dx$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ und $\|f_n(x)\| \;\leq g(x)$ für alle $x \in A$ annehmen (Herausnahme der Nullmenge). Mit Satz 3.1 ist f messbar, und mit dem Majoranten-Kriterium (s. §2 (5)) ist (wegen $\|f\|_2 \;\leq g$) f auch integrierbar. Betrachte nun die Funktionen

$$g_n(x) := \sup_{m\geq n} \{\|f(x) \; - f_m(x)\|_2\}$$

Mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; f(x)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \;=\; 0$ (punktweise Konvergenz) und außerdem ist $g_{n+1}(x) \;\leq\; g_n(x)$ für alle $x \in A$. Nun sind die Funktionen g_n messbar. Denn die Funktionen
$g_{n,k}(x) := \sup\{\|f(x) - f_m(x)\|_2 : \; m = n, n+1, ..., n+k\}$
sind messbar. Mit $\lim\limits_{k\to\infty} g_{n,k}(x) \;= g_n(x)$ folgt aus Satz 3.1 die Messbarkeit von g_n.

Da $\|f(x) - f_m(x)\|_2 \leq \|f(x)\|_2 + \|f_m(x)\|_2 \leq 2g(x)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, gilt auch $g_n(x) \leq 2g(x)$. Mit dem Majoranten-Kriterium sind die g_n auch integrierbar.

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A g_n(x)\,dx = 0$ und folglich $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A \|f(x) - f_n(x)\|_2\,dx = 0$.

Wegen
$$\left\| \int_A f(x)\,dx - \int_A f_n(x)\,dx \right\|_2 \leq \int_A \|f(x) - f_n(x)\|_2\,dx$$
(vgl. §2 (4)) hat man die Behauptung. $\diamond$

Wir können mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz das Korollar 3.3 noch erweitern.

Korollar 3.5 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar, und $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{A}_L$ paarweise disjunkt. Sei $f : A \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. f ist genau dann über A integrierbar, falls $f|A_n$ über A_n integrierbar ist und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} \|f(x)\|_2\,dx$ konvergiert.*

Es gilt dann
$$\int_A f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\,dx.$$

Beweis. Definiere $f_n : A \to \mathbb{R}^m$
$$f_n(x) := \left\{ \begin{array}{cl} f(x) & \text{für } x \in A_n \\ 0 & \text{für } x \in A \setminus A_n \end{array} \right\} = f\,\chi_{A_n}(x).$$
Mit §2 (2) ist f_n über A integrierbar genau dann, wenn $f|A_n$ über A_n integrierbar ist.

Sei nun f über A integrierbar vorausgesetzt. Dann ist $\|f\|_2$ über A_n integrierbar (§2 (2)), und es folgt
$$\sum_{n=1}^{N} \int_{A_n} \|f(x)\|_2\,dx = \int_A \sum_{n=1}^{N} \|f_n(x)\|_2\,dx \leq \int_A \|f(x)\|_2\,dx.$$
Folglich konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} \|f(x)\|_2\,dx$, und eine Beweisrichtung ist gezeigt.

Für die Umkehrung setze $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \|f_k(x)\|_2$. Es gilt $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$. Außerdem haben wir
$$\int_A g_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_A \|f_k(x)\|_2\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} \|f(x)\|_2\,dx.$$
Damit sind die Voraussetzungen von Satz 3.2 erfüllt, und es folgt, daß $\|f(x)\|_2 = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ integrierbar ist (also auch f). Die behauptete Gleichung folgt mit Satz 3.4 durch Anwendung auf die Partialsummen
$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Man beachte $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ und $\|f(x)\|_2$ ist eine integrierbare Majorante der $s_n(x)$, d.h. $\|s_n(x)\|_2 \le \|f(x)\|_2$. ◇

Die Aussagen gelten natürlich auch für $d = 1$. Insbesondere können wir die Beziehung zu uneigentlichen Riemann-Integralen herstellen. Wir betrachten nur den einseitigen Fall $[a,\infty[$. Zur Erinnerung: $f(x)$ heißt auf $[a,\infty[$ uneigentlich Riemann-integrierbar, falls für alle $a < b < \infty$ die Einschränkung $f|[a,b]$ Riemann-integrierbar ist, und $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx =: \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ existiert (R-Integral!). Im Vergleich zum Lebesgue-Integral erhalten wir:

Proposition 3.6 *Sei $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die für jedes $a < b < \infty$ gilt: $f|[a,b]$ ist R-integrierbar. f ist integrierbar (im Lebesgueschen Sinne) genau dann, wenn $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ mit $b \to \infty$ konvergiert. Es gilt dann*

$$\int_{[a,\infty[} f(x)\,dx \;=\; \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Beweis. Ist f Lebesgue-integrierbar, so existieren $\int\limits_{[a,\infty[} |f(x)|\,dx$ und $\int\limits_{[a,b]} |f(x)|\,dx$ für alle $a < b < \infty$. Mit Satz 2.9 stimmen auf $[a,b]$ Riemann-Integral und Lebesgue-Integral von $|f|$ überein, und es gilt

$$\int_{[a,b]} |f(x)|\,dx \;=\; \int_a^b |f(x)|\,dx \;\le\; \int_{[a,\infty[} |f(x)|\,dx$$

Also konvergiert $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ mit $b \to \infty$.

Sei umgekehrt die Konvergenz von $\int_a^b |f(x)|\,dx$ mit $b \to \infty$ vorausgesetzt. Dann gilt für $A_n = [a+(n-1), a+n[$

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} |f(x)|\,dx \;=\; \sum_{n=1}^\infty \int_{a+(n-1)}^{a+n} |f(x)|\,dx \;=\; \lim_{b\to\infty} \int_a^b |f(x)|\,dx$$

und Korollar 3.5 ergibt, daß f Lebesgue-integrierbar ist und

$$\int_{[a,\infty[} f(x)\,dx \;=\; \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f(x)\,dx \;=\; \sum_{n=1}^\infty \int_{a+(n-1)}^{a+n} f(x)\,dx \;=\; \int_a^\infty f(x)\,dx$$

ist. ◇

Bemerkung:

(1) Mit T14 (Blatt 5) wissen wir, daß $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $(f(0) = 1)$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist und nicht Lebesgue-integrierbar. (Hingegen ist f^2 L-integrierbar.)

Wir müssen also beim Vergleich vom L-Integral mit dem R-Integral unterscheiden, ob man über kompakte oder nicht-kompakte Bereiche integriert. Ist $A = [a, b]$, so ist das L-Integral das allgemeinere Integral. Ist $A = [a, \infty[$, so gibt es Funktionen, die uneigentlich R-integrierbar sind, aber nicht L-integrierbar, und umgekehrt.

(2) Die Aussage von Proposition 3.6 gilt auch für links unbeschränkte Intervalle und beidseitig unbeschränkte Intervalle mit entsprechenden Modifikationen.

Hinsichtlich gleichmäßiger Konvergenz von Funktionenfolgen gilt folgendes Resultat für das Lebesguesche Integral. (Für das R-Integral siehe Analysis 2.)

Proposition 3.7 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar mit $m(A) < \infty$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter, messbarer Funktionen $f_n : A \to \mathbb{R}^m$, so daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf A gegen eine Grenzfunktion $f : A \to \mathbb{R}^m$ konvergiert. Dann sind alle f_n und f integrierbar, und*

$$\int_A f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx.$$

Beweis. Siehe T13, Blatt 5. ◇

Ist $A = [a, b]$, so folgt aus Satz 3.4 die Aussage von Satz 9.4, Analysis 2. In diesem Fall ist Satz 3.4 auch echt stärker als Satz 9.4. Betrachte dazu Beispiel (3) am Beginn von §9, Analysis 2,

$$f_n(x) \;=\; \begin{cases} 1 \quad \text{falls } x \;=\; \dfrac{k}{n!}, & x \in [0,1] \\ \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise (aber majorisiert) gegen die Dirichletfunktion f

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Ist hingegen $m(A) = \infty$, so ändert sich die Lage, wie folgendes Beispiel zeigt. Seien $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) \;=\; \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]} \;=\; \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ gegen die Nullfunktion. Für L-Integral und uneigentliches R-Integral gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \;=\; 2 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx.$$

In letzterem Beispiel sieht man dreierlei:

(i) In Satz 3.4 kann man auf die integrierbare Majorante nicht verzichten.

(ii) In Proposition 3.7 kann man auf die Voraussetzung $m(A) < \infty$ nicht verzichten.

(iii) Satz 9.4, Analysis 2, gilt nicht für das uneigentliche R-Integral.

Eine nützliche Konsequenz des Lebesgueschen Satzes ist folgende Aussage.

Proposition 3.8 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar, $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \overline{B} \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : A \times B \to \mathbb{R}^m$ sei eine Funktion, so daß*

$$\lim_{y \to y_0} f(x,y) \;=: h(x)$$

für alle $x \in A$ existiert. Ferner sei $x \mapsto f(x,y)$, $A \to \mathbb{R}^m$ für jedes feste $y \in B$ integrierbar (über A), und es gelte

$$\|f(x,y)\|_2 \;\leq\; g(x)$$

für alle $y \in B$, $x \in A$, wobei $g : A \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. Dann gilt: $h : A \to \mathbb{R}^m$ ist integrierbar, und wir haben

$$\int_A h(x)\,dx \;=\; \lim_{y \to y_0} \int_A f(x,y)\,dx$$

Beweis. Ist $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge mit $y_k \in B$, $\lim_{k \to \infty} y_k = y_0$, so erfüllt $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $f_k(x) := f(x, y_k)$ die Voraussetzungen von Satz 3.4.

Damit ist $h(x) = \lim_{k \to \infty} f(x, y_k)$ integrierbar, und es gilt

$$\int_A h(x)\,dx \;=\; \lim_{k \to \infty} \int_A f(x, y_k)\,dx$$

Dies gilt für alle Folgen $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $y_k \in B$ und $y_k \to y_0$, woraus

$$\int_A h(x)\,dx \;=\; \lim_{y \to y_0} \int_A f(x,y)\,dx$$

folgt. $\diamond$

4 Der Satz von Fubini und der Transformationssatz

Für $d \geq 2$ können wir $\mathbb{R}^d$ aufspalten in $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $p + q = d$. Ein halboffener Quader Q in $\mathbb{R}^d$ ist gegeben durch Punkte

$$x \;=\; (x_1, ..., x_d) \;=\; (y_1, ..., y_p, z_1, ..., z_q),$$

also ist

$$Q \;=\; \{x = (y,z) :\; y \in Q',\; z \in Q''\}$$

und deshalb $m(Q) = m_p(Q')\, m_q(Q'')$, wobei m_p bzw. m_q das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^p$ bzw $\mathbb{R}^q$ bezeichnet. Die Gleichheit $m(Q) = m_p(Q') m_q(Q'')$ kann man auch schreiben

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_Q(x)\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \chi_Q(y,z)\,dy \right)\,dz. \qquad (*)$$

Dies ist der Satz von Fubini für χ_Q. Dabei wird (bei festem $z \in \overset{o}{Q''}$) über die Funktion $y \mapsto \chi_Q(y,z)$ über $\mathbb{R}^p$ integriert. Die dabei entstehende Funktion $z \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^p} \chi_Q(y,z)\,dy$ ist fast überall auf $\mathbb{R}^q$ definiert, und da gilt

$$\int_{\mathbb{R}^p} \chi_Q(y,z)\;dy \;=\; \begin{cases} m_p(Q') & \text{für } z \in \overset{o}{Q''} \\ 0 & \text{für } z \notin \overline{Q''}, \end{cases}$$

ist diese Funktion in z integrierbar über $\mathbb{R}^q$. Der Satz von Fubini besagt, daß eine entsprechende Formel für alle über $\mathbb{R}^d$ integrierbaren Funktionen gilt.

Zunächst behandeln wir Treppenfunktionen. Dabei ist eine **Treppenfunktion** gegeben durch $f(x) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{Q_k}(x),\;\; a_k \in \mathbb{R}^m,\; Q_k$ halboffene Quader.

Lemma 4.1 *Sei* $\mathbb{R}^d \;= \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von integrierbaren Treppenfunktionen, so daß* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \|f_n(x)\|_2\,dx$ *konvergiert. Dann wissen wir bereits, daß* $f(x) \;=\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *für fast alle* $x \in \mathbb{R}^d \;= \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ *konvergiert (Korollar 3.3) und*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\;dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\;dx \tag{4.1}$$

gilt. Darüber hinaus gilt: Es gibt eine Nullmenge $B \subseteq \mathbb{R}^q$ *derart, daß für jedes* $z \in \mathbb{R}^q \backslash B$ *eine Nullmenge* $C(z) \subseteq \mathbb{R}^p$ *existiert, so daß*

$$f(y,z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y,z) \qquad \textit{für } z \in \mathbb{R}^q\backslash B,\; y \in \mathbb{R}^p \backslash C(z)$$

absolut konvergiert. Es gilt dann:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\;dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(y,z)\;dy\right)\;dz$$

(Achtung: B *bzw.* $C(z)$ *sind Nullmengen in* $\mathbb{R}^q$ *bzw.* $\mathbb{R}^p$*).*

Beweis. Mit den Vorbemerkungen $(*)$ gilt für die Treppenfunktionen

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\;dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f_n(y,z)\;dy\right)\;dz \tag{4.2}$$

(ebenso mit $\|f_n(x)\|_2$ als Integrand). Das ist der Satz von Fubini für Treppenfunktionen.

Bezeichne $F_n(z) := \int_{\mathbb{R}^p} \|f_n(y,z)\|_2\,dy$. Dann gilt

$$0 \;\le\; \int_{\mathbb{R}^q} F_n(z)\;dz \;\overset{(2)}{=}\; \int_{\mathbb{R}^d} \|f_n(x)\|_2\;dx,$$

und folglich konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^q} F_n(z)\;dz \;= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \|f_n(x)\|_2\;dx \;<\infty.$$

Mit Korollar 3.3 existiert eine Nullmenge $B \subseteq \mathbb{R}^q$, so daß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ und dann auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^p} f_n(y,z)\,dy$ für alle $z \in \mathbb{R}^q \backslash B$ konvergieren. Ferner gilt mit Korollar 3.3 auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f_n(y,z)\; dy \right)\; dz \;=\; \int_{\mathbb{R}^q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^p} f_n(y,z)\; dy \right)\; dz \tag{4.3}$$

Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(z) \;=\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \|f_n(y,z)\|_2\, dy$ für $z \in \mathbb{R}^q \backslash B$ folgt wiederum mit Korollar 3.3 die Existenz von Nullmengen $C(z) \subseteq \mathbb{R}^p$, so daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y,z) \;=\; f(y,z) \qquad\qquad \text{für } y \in \mathbb{R}^p \backslash C(z) \tag{4.4}$$

absolut konvergiert, und wir haben

$$\int_{\mathbb{R}^p} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y,z)\; dy \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^p} f_n(y,z)\; dy. \tag{4.5}$$

Wendet man (1)...(5) an, so folgt auch

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\; dx \;&\overset{(1)}{=}\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\; dx \;\overset{(2)}{=}\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f_n(y,z)\; dy \right)\; dz \\ &\overset{(3)}{=}\; \int_{\mathbb{R}^q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^p} f_n(y,z)\; dy \right)\; dz \;\overset{(5)}{=}\; \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y,z)\; dy \right)\; dz \\ &\overset{(4)}{=}\; \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(y,z)\; dy \right)\; dz. \end{aligned}$$

$\diamond$

Im nächsten Schritt zeigen wir den Satz von Fubini für Funktionen, die außerhalb einer Nullmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ verschwinden.

Lemma 4.2 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ eine Nullmenge, und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ eine (messbare) Funktion mit $f|\mathbb{R}^d \backslash A = 0$. Dann existiert eine Nullmenge $B \subseteq \mathbb{R}^q$ derart, daß zu jedem $z \in \mathbb{R}^q \backslash B$ eine Nullmenge $C(z) \subseteq \mathbb{R}^p$ existiert, so daß $(y,z) \in \mathbb{R}^d \backslash A$ für alle $z \in \mathbb{R}^q \backslash B$, $y \in \mathbb{R}^p \backslash C(z)$.*
Es gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\; dx \;= 0 \;=\; \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(y,z)\; dy \right)\; dz.$$

Beweis. Mit $m(A) = 0$ existieren Quader Q_{ij} mit $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_{ij}$ und $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m(Q_{ij}) \;\leq 2^{-i}$. Setze $f_{ij}(x) \;= \chi_{Q_{ij}}(x)$. Da

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_{ij}(x)\; dx \;=\; m\,(Q_{ij}),$$

gilt für $I, J \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i,j=1}^{I,J} \int_{\mathbb{R}^d} f_{ij}(x)\; dx \;\leq\; \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \;= 1,$$

also konvergiert $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f_{ij}(x)\, dx$ (unabhängig von der Reihenfolge).

Mit Lemma 16.1 existiert $B \subseteq \mathbb{R}^q$ Nullmenge, und zu $z \in \mathbb{R}^q \backslash B$ eine Nullmenge $C(z) \subseteq \mathbb{R}^p$, so daß für $z \in \mathbb{R}^q \backslash B$, $y \in \mathbb{R}^p \backslash C(z)$ die Reihe $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} f_{ij}(y,z)$ konvergiert.

Nun divergiert $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} f_{ij}(x)$ für $x \in A$, denn wir haben $x \in A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_{ij}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_{ij}(x) \geq 1$ für alle i falls $x \in A$. Somit liegen die Punkte $x = (y, z)$ mit $z \in \mathbb{R}^q \backslash B$ und $y \in \mathbb{R}^p \backslash C(z)$ sicherlich nicht in A. Die Gleichung gilt mit dem vorangehenden Lemma. $\diamond$

Im nächsten Schritt zeigen wir, daß sich jede integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ durch Treppenfunktionen in einer L^1-Halbnorm approximieren läßt (vgl. für reellwertige f Blatt8, Z19).

Proposition 4.3 *Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ integrierbar. Zu $\epsilon > 0$ existiert eine Treppenfunktion $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ mit*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|f(x) - h(x)\|_2 \, dx \;\leq\; \epsilon.$$

Beweis. Sei $\mathcal{Z} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegung des $\mathbb{R}^d$ mit $S(f, \mathcal{Z}) \leq \frac{\epsilon}{4}$, und es sei $R(f, \mathcal{Z}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x_n)\, m(A_n)$ absolut konvergent, wobei $x_n \in A_n$.

Damit existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \|f(x_n)\|_2 \, m(A_n) \;\leq\; \frac{\epsilon}{4}$$

Für die Linearkombination $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} f(x_n)\, \chi_{A_n}(x)$ gilt dann:

$$R(\|f - g\|_2, \mathcal{Z}) \;=\; \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f(x_n)\|_2 \, m(A_n) \;\leq\; \frac{\epsilon}{4}$$

bei Wahl der $x_n \in A_n$ wie oben, und

$$S(f-g, \mathcal{Z}) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(f-g, A_n)\, m(A_n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(f, A_n)\, m(A_n)$$
$$= \; S(f, \mathcal{Z}) \;\leq\; \frac{\epsilon}{4}.$$

Nun ist

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|f(x) - g(x)\|_2 \, dx \;\leq\; R(\|f-g\|_2, \mathcal{Z}) \;+\; S(f-g, \mathcal{Z}) \;\leq\; \frac{\epsilon}{2}$$

(vgl. Lemma 2.16). Ersetzt man die $A_n \in \mathcal{Z}$ für $n = 1, ..., N$ durch endliche Vereinigungen $B_n \in \mathcal{A}_0$ von Quadern Q_k (Blatt 6, T13), so erreicht man

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_{A_N}(x) \;-\; \chi_{B_n}(x)| \;\leq\; \frac{\epsilon}{2NM} \qquad \text{mit } M = \max_{m=1,\ldots,N} \{\|f(x_n)\|_2\}$$

Dann gilt für die Treppenfunktion $h(x) = \sum\limits_{N=1}^{N} f(x_n)\, \chi_{B_n}(x)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|g(x) - h(x)\|_2 \, dx \;\leq\; \frac{\epsilon}{2},$$

woraus $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \|f(x) - h(x)\|_2 \leq \epsilon$ folgt. $\diamond$

Satz 4.4 (Fubini)
(Guido Fubini, 1879-1943, Turin)
Sei $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. *Sei* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ *integrierbar. Dann existiert das Integral*

$$\int_{\mathbb{R}^p} f(y, z)\, dy$$

für fast alle $z \in \mathbb{R}^q$, *und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(y, z)\, dy \right) dz$$

Beweis. Mit Proposition 16.3 existiert zu f eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $h_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|f(x) - h_n(x)\|_2 \, dx \;\to 0 \qquad \text{mit } n \to \infty$$

Wähle Indizes $n_1 < n_2 < \ldots$, so daß $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \|h_n(x) - h_{n_k}(x)\|_2 \, dx \;\leq \dfrac{1}{2^k}$ für alle $n \geq n_k$. Die Teilfolge $(h_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ hat die Eigenschaft

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \|h_{n_{k+1}}(x) - h_{n_k}(x)\|_2 \, dx \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \;= 1.$$

Ersetze nun $g_k := h_{n_k}$. Somit gilt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \|g_{k+1} - g_k\|_2 \, dx \;\leq 1$. Mit Lemma 16.1 (erster Teil) konvergiert $\lim\limits_{K \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{K} (g_{k+1}(x) - g_k(x)) \,+ g_1(x) \;=\; \lim\limits_{k \to \infty} g_k(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$. Bezeichne $f^*(x) \;=\; \lim\limits_{k \to \infty} g_k(x)$ (Definition nur für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$). Außerdem ist mit Lemma 16.1 (erster Teil) auch $f^*(x) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)) \,+ g_1(x)$ integrierbar und

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|f(x) - f^*(x)\|_2 \, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{k \to \infty} \|f(x) - g_k(x)\|_2 \, dx$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \|f(x) - g_k(x)\|_2 \, dx \;= 0.$$

Folglich ist $f(x) \;=\; f^*(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$. Mit anderen Worten: Es gibt eine Nullmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$, so daß $f(x) \;=\; \lim\limits_{k \to \infty} g_k(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$. Um den zweiten Teil von Lemma 16.1 anzuwenden, gehen wir nochmals zu Reihen über, indem wir $f_k :=$

$g_{k+1} - g_k$, $(g_0 = 0)$ setzen. Es gilt dann $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$. Mit Lemma 16.1 existiert dann $\int\limits_{\mathbb{R}^p} f(y,z)\,dy$ für fast alle $z \in \mathbb{R}^q$ und

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(y,z)\,dy \right) dz.$$

$\diamond$

Bemerkung: Selbstverständlich läßt sich im Satz von Fubini die Reihenfolge in der Integration vertauschen, indem man zuerst über $\mathbb{R}^q$ und dann über $\mathbb{R}^p$ integriert. Der Nachweis läuft exakt gleich. Insbesondere gilt

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(y,z)\,dy \right) dz = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(y,z)\,dz \right) dy$$

Es sei erwähnt, daß die pure Existenz solcher Doppelintegrale i.a. nicht die Integrierbarkeit von f nach sich zieht. Wir haben f integrierbar vorauszusetzen.

Folgendes Beispiel zeigt, daß beide Doppelintegrale mit verschiedenen Werten existieren können, falls Integrierbarkeit über den ganzen $\mathbb{R}^d$ nicht vorliegt.

Beispiel: Seien $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$g_n | \mathbb{R} \backslash \,]1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\,[\; = 0$$

$$\text{und} \quad \int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n+1}} g_n(x)\,dx = 1$$

Definiere $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x))\, g_n(y)$$

Beachte: Für $(x,y) \notin [0,1[\, \times [0,1[$ ist $f(x,y) = 0$ und für $(x,y) \in [0,1[\, \times [0,1[$ hat man nur einen Summanden in der Reihe. Man hat also keine Konvergenzprobleme! f ist fast überall definiert.

Nun gilt einerseits für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \int_{[0,1]} f(x,y)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y) \left(\int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n+1}} g_n(x)\,dx - \int_{1-\frac{1}{n+1}}^{1-\frac{1}{n+2}} g_{n+1}(x)\,dx \right) = 0$$

Also gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy = 0$$

Andererseits hat man für $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_{[0,1]} f(x,y)\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) \int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n+1}} g_n(y)\,dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) = g_1(x) - \lim_{n\to\infty} g_{n+1}(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{für } x \in \,]0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\; dy \right)\; dx \;=\; \int_0^{\frac{1}{2}} g_1(x)\; dx \;=\; 1$$

An dieser Stelle ist es angebracht, eine einfache Folgerung des Satzes von Levi (3.2) explizit zu formulieren.

Satz 4.5 (Tonelli)
Sei $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit folgender Eigenschaft: Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist $f|K$ integrierbar über K. Es existiere ferner eines der iterierten Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \|f(y,z)\|_2\, dy \right)\; dz, \qquad \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} \|f(y,z)\|_2\, dz \right)\; dy$$

Dann ist f integrierbar, und es gelten die Aussagen von Satz 16.4:

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(y,z)\; dy \right)\; dz \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\; dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(y,z)\; dz \right)\; dy$$

Beweis. Sei $Q_n = [-n,n]^d$ und $f_n(x) := \|f(x)\|_2\; \chi_{Q_n}(x)$.
Die $f_n(x)$ bilden eine monoton wachsende Folge von integrierbaren Funktionen. Mit Satz 16.4 gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\; dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \|f_n(y,z)\|_2\; dy \right)\; dz \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \|f(y,z)\|_2\; dy \right)\; dz$$

wobei wir die Existenz des ersten iterierten Integrals angenommen haben. Somit bilden die Integrale $\int\limits_{\mathbb{R}^d} f_n(x)dx$ eine beschränkte Folge und mit Satz 3.2 folgt, daß $\|f(x)\|_2 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ integrierbar ist. Satz 16.4 liefert die restlichen Aussagen. $\diamond$

Bisher haben wir hinsichtlich iterierter Integrale nur Funktionen betrachtet, die über den ganzen $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ integrierbar sind. Ist $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ integrierbar, so setze

$$g(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^d \backslash A \end{cases}$$

Dann ist $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ integrierbar und $\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x)\, dx \;= \int_A f(x)\, dx$, und wir können den Satz von Fubini auf g anwenden

$$\int_A f(x)\; dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\; dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} g(y,z)\; dzdy \;=\; \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} g(y,z)\; dydz$$

Natürlich möchte man bei den iterierten Integralen bei dem gegebenen $f(y,z)$ bleiben. Dies geht mit direkter Angabe der sog. Schnittmengen.

Zu $A \subseteq \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ messbar und $z \in \mathbb{R}^q$ bezeichne die **Schnittmenge**

$$A_z := \;\{y \in \mathbb{R}^p :\; (y,z) \in A\}.$$

A_z ist (als Teilmenge des $\mathbb{R}^p$) für fast alle $z \in \mathbb{R}^q$ messbar.

Nachweis hierzu: Sei $m(A) < \infty$ vorausgesetzt. Dann ist χ_A integrierbar, und nach dem Satz von Fubini ist

$$\chi_{A_z}(y) \;=\; \chi_A(y,z)$$

für fast alle $z \in \mathbb{R}^p$ integrierbar über $\mathbb{R}^p$, also auch messbar. Folglich ist $A_z = \{y \in \mathbb{R}^p : \chi_{A_z(y)} > 0\}$ messbar.

Ist $m(A) = \infty$, so betrachte $A \cap [-n,n]^d$. Dann gilt

$$A_z \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \,\cap\, [-n,n]^d)_z,$$

also ist A_z messbar für fast alle $z \in \mathbb{R}^q$.

Somit können wir schreiben:

$$\int_A f(x)\,dx \;=\; \int_B \int_{A_z} f(y,z)\,dy\,dz$$

wobei $B \subseteq \mathbb{R}^q$ messbar mit
$\{z \in \mathbb{R}^q : (y,z) \in A$ für mindestens ein $y \in \mathbb{R}^p\} \subseteq B$.

Häufig ist A durch Ungleichungen beschrieben, und damit A_z direkt gegeben. Beispiel: $a(z)$, $b(z)$ Funktionen,

$$A \;=\; \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \; c \le z \le d, \;\; a(z) \le y \le b(z)\}$$

Dann ist

$$\int_A f(x)\,dx \;=\; \int_c^d \int_{a(z)}^{b(z)} f(y,z)\,dy\,dz \;=\; \iint_A f(y,z)\,dy\,dz$$

(Konvention: Wir werden auch $\iint\limits_A f(y,z)\,dydz$ statt $\int\limits_A f(x)dx$ schreiben.)

Setzt man oben $f = \chi_A$, so gilt für die Fläche von A

$$m\,(A) \;=\; \int_c^d (b(z) \,-\, a(z))\,dz$$

In Blatt 5-7 haben wir schon Flächen und Volumen bestimmt. Bei Integralen über $\mathbb{R}^3$ hat man mehrere Möglichkeiten.

Zum Beispiel können wir zuerst über $\mathbb{R}^2$ integrieren. Die Schnittmengen sind dann Flächenstücke. Für $z \in \mathbb{R}$ ist $A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in A\}$. Dann hat man (falls f integrierbar)

$$\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_B \left(\iint_{A_z} f(x,y,z)\, dx\, dy \right) dz$$

Speziell für $f = \chi_a$, $A \subseteq \mathbb{R}^3$ messbar mit $m_3(A) < \infty$

$$m_3(A) = \int_B m_2(A_z)\, dz$$

Hieraus leitet sich das sog. **Cavalierische Prinzip** ab:

Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ messbar, und gilt $m_2(A_z) = m_2(B_z)$ für alle $z \in \mathbb{R}$, $m_3(A), m_3(B) < \infty$, so gilt:

$$m_3(A) = m_3(B).$$

Ist speziell A ein Rotationskörper

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq z \leq d,\ x^2 + y^2 \leq f(z)^2\},$$

so ist $m_2(A_z) = \pi\, (f(z))^2$, also

$$m_3(A) := \pi \int_c^d f^2(z)\, dz$$

Ist A in der Form $(m(A) < \infty)$

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B,\ a(x,y) \leq z \leq b(x,y)\}$$

so folgt:

$$\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_B \left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dx\, dy$$

Speziell $f = \chi_a$ liefert

$$m_3(A) = \int \int_B (b(x,y) - a(x,y))\, dxdy.$$

Das zweite große Thema dieses Paragraphen bilden Transformationen unterm Integral. In Analysis II, Satz 10.10 haben wir eine Substitutionsregel bewiesen, wobei die Substitutionsfunktion φ stetig differenzierbar vorausgesetzt war. Für die Verallgemeinerung auf den $\mathbb{R}^d$ werden wir das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante benötigen (entspricht im $\mathbb{R}^1$ der Tatsache, daß die Substitutionsfunktion umkehrbar ist.) Im Blatt 7, T17 haben wir folgendes Resultat hergeleitet:

Proposition 4.6 *Sei $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine umkehrbare lineare Abbildung (d.h.* $\det T \neq 0$) *und $A \subseteq \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar. Dann ist auch $T(A)$ Lebesgue-messbar, und es gilt*

$$m\,(T(A)) = |\det T|\; m\,(A)$$

Bemerkung: Ist T nicht umkehrbar, so gilt diese Gleichung dennoch, denn dann ist $T(A)$ in einer Hyperebene enthalten mit Dimension echt kleiner d, also $m(T(A)) = 0$.

Lemma 4.7 *Sei $\varphi : U \to V$, $V, U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, ein Diffeomorphismus und $Q \subseteq U$ ein kompakter Quader. Dann gilt:*

$$m(\varphi(Q)) \leq \max_{x \in Q} |\det D\varphi(x)| \, m(Q)$$

Beweis. Da mit Q auch $\varphi(Q)$ kompakt ist (Satz 8.8, Analysis I), folgt, daß $\varphi(Q) \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar ist, und $m(\varphi(Q)) < \infty$ ist (Satz 2.13). Somit existiert $c \geq 0$ mit

$$m(\varphi(Q)) = c \, m(Q).$$

(Man beachte: Ist $m(Q) = 0$, so auch $m(\varphi(Q)) = 0$, siehe Übungen).

Wir zeigen: $c \leq \max_{x \in Q} |\det D\varphi(x)|$.

Dazu teilen wir in einem Halbierungsschnitt den Quader Q in 2^d kompakte Teilquader.

Unter diesen gibt es mindestens einen, etwa Q_1, mit $m(\varphi(Q_1)) \geq c\, m(Q_1)$.
(Andernfalls gilt $m(\varphi(Q)) < c\, m(Q)$ mit der Additivität von m, und der Tatsache, daß Ränder der Teilquader Nullmengen sind.)

Durch sukzessive Wiederholung erhält man eine Folge von kompakten Quadern Q_n mit $Q \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \ldots$ mit

$$(*) \qquad m(\varphi(Q_n)) \geq c \, m(Q_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_n = \{a\}$, $a \in \mathbb{R}^d$. (Mit Korollar 8.12 ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_n \neq \emptyset$. Da die Seitenlängen der Q_n halbiert werden, kann im Durchschnitt nur ein Punkt liegen.)

Da φ differenzierbar ist, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß bei

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + D\varphi(a)\, h + R(h), \qquad \lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|_2} = 0$$

zusätzlich gilt

$$\|D\varphi(a)^{-1} \frac{R(h)}{\|h\|_2}\|_2 < \epsilon \qquad \text{für } \|h\|_2 < \delta.$$

Nun gilt $D\varphi(a)\, h + R(h) = D\varphi(a)\,(h + D\varphi(a)^{-1} R(h))$ und

$$\|h + D\varphi(a)^{-1} R(h)\|_2 < (1+\epsilon)\, \|h\|_2 \qquad \text{für } \|h\|_2 < \delta.$$

Ein Quader Q' enthalten in $\{a+h : \|h\|_2 < \delta\} \ = U_\delta(a)$ wird somit durch φ übergeführt in eine Menge, die in einem Parallelotop liegt, das aus Q' durch Anwendung von $D\varphi(a)$ und $(1+\epsilon)$-fache Vergrößerung entsteht. Mit Proposition 16.6 heißt das

$$m\,(\varphi(Q')) \ \leq \ (1+\epsilon)^d \,|\det(D\varphi(a))|\, m\,(Q').$$

Wäre nun $\max\limits_{x\in Q} |\det D\varphi(x)| \ < c$, so gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $(1+\epsilon)^d \,|\det D\varphi(a)| \ < c$. Nun gibt es ein N mit Q_n sind enthalten in $U_\delta(a)$ für $n \geq N$, so daß für $n \geq N$ gilt

$$m\,(\varphi(Q_n)) \ \leq \ (1+\epsilon)^d \,|\det(D\varphi(a))|\, m\,(Q_n) \ < \ c\, m\,(Q_n)$$

im Widerspruch zu $(*)$. Damit ist die Ungleichung gezeigt. $\diamond$

Lemma 4.8 *Sei* $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$, $\ U \subseteq \mathbb{R}^d$ *offen, ein Diffeomorphismus und* $K \subseteq U$ *eine kompakte Menge mit* $m\,(K \setminus \overset{o}{K}) \ = 0$. *Dann gilt:*

$$\min_{x\in K} |\det D\varphi(x)|\, m\,(K) \ \leq \ m\,(\varphi(K)) \ \leq \ \max_{x\in K} |\det D\varphi(x)|\, m\,(K)$$

Beweis. Wir erweitern Lemma 16.7 für kompakte Mengen $K \subseteq U$. Es gilt $\overset{o}{K} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$, $\ Q_j$ kompakte Würfel, wobei $Q_i \cap Q_j$ für $i \neq j$ nur Ränder vom Maß Null enthält, siehe Satz 2.7. Folglich gilt $m(K) \ = m(\overset{0}{K}) \ = \sum\limits_{j=1}^{\infty} m(Q_j)$.

Entsprechend gilt für die Bilder $\varphi(Q_j)$:

$$(\varphi(K))^0 \ = \ \bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi(Q_j) \qquad \text{und } m\,(\varphi(Q_i) \cap \varphi(Q_j)) \ = 0 \qquad \text{für } i \neq j$$

Aus $\varphi(K) \setminus \varphi(\overset{o}{K}) = \varphi(K \setminus \overset{o}{K})$ folgt $m(\varphi(K) \setminus \varphi(\overset{o}{K})) \ = 0$ (siehe Übungsaufgabe). Also gilt mit Lemma 16.7 einfach

$$m\,(\varphi(K)) \ = \ m\,(\varphi(\overset{o}{K})) \ = \ \sum_{j=1}^{\infty} m\,(\varphi(Q_j))$$

(Bilder von Nullmengen sind Nullmengen von $\varphi \in C^1(U)$).

Mit Lemma 16.7 folgt

$$m\,(\varphi(K)) \ \leq \ \max_{x\in K} |\det D\varphi(x)|\, m\,(K)$$

Sei $\psi : \varphi(U) \to U$, $\ \psi = \varphi^{-1}$. ψ ist ebenso ein Diffeomorphismus. Dann gilt auch für ψ und $\varphi(K)$ kompakt (da $m(\varphi(K) \setminus \varphi(\overset{o}{K})) \ = 0$

$$m\,(\psi(\varphi(K)) \ \leq \ \max_{y\in\varphi(K)} |\det D\psi(y)|\, m\,(\varphi(K))$$

Da $|\det D\varphi(x)|\,|\det D\psi(y)| = 1$ falls $y = \varphi(x)$, gilt

$$\min_{x\in K} |\det D\varphi(x)| = \frac{1}{\max\limits_{y\in\varphi(K)} |\det D\psi(y)|},$$

also auch

$$\min_{x\in K} |\det D\varphi(x)|\, m(K) \leq m(\varphi(K)).$$

◇

Als nächsten Schritt benötigen wir eine Ergänzung zu Proposition 16.3.

Proposition 4.9 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ integrierbar über U, $\epsilon > 0$. Dann existiert eine Treppenfunktion $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ mit $h|\mathbb{R}^d \backslash U = 0$ und*

$$\int_U \|f(x) - h(x)\|_2\, dx < \epsilon.$$

Beweis. Sei $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ die triviale Fortsetzung von f, d.h.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in U \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^d \backslash U \end{cases}.$$

g ist integrierbar, also existiert $\tilde{h} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ Treppenfunktion mit $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \|g(x) - \tilde{h}(x)\|_2\, dx < \frac{\epsilon}{2}$. Nun gilt $\|g(x) - \chi_U(x)\,\tilde{h}(x)\|_2 \leq \|g(x) - \tilde{h}(x)\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$, also $\int_{\mathbb{R}^d} \|g(x) - \chi_U \tilde{h}(x)\|_2\, dx < \frac{\epsilon}{2}$. Nun approximieren wir $\chi_U \tilde{h}$ durch eine Treppenfunktion h mit $h|\mathbb{R}^d \backslash U = 0$. Sei B eine offene, beschränkte Menge mit $\{x \in \mathbb{R}^d : \tilde{h}(x) \neq 0\} \subseteq B$. Dann existieren endlich viele Quader $Q_1, ..., Q_n \subseteq U \cap B \subseteq U$, so daß für $A = \bigcup\limits_{j=1}^{n} Q_j$ gilt: $m(U \cap B) - m(A) < \dfrac{\epsilon}{2M}$, $M = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^d} \|\tilde{h}(x)\|_2$.

Man setze $h = \chi_A \cdot \tilde{h}$. h ist eine Treppenfunktion mit Werten im $\mathbb{R}^m$ und es gilt

$$h|\mathbb{R}^d \backslash U = \int_{\mathbb{R}^d} \|h(x) - \chi_U(x)\,\tilde{h}(x)\|_2\, dx$$

$$= \int_{U\cap B} \|h(x) - \tilde{h}(x)\|_2\, dx \leq M\,(m(U \cap B) - m(A)) < \frac{\epsilon}{2}$$

Folglich gilt

$$\int_U \|f(x) - h(x)\|_2\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \|g(x) - h(x)\|_2\, dx < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

◇

Satz 4.10 (Transformationssatz) *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\varphi : U \to V$ sei ein Diffeomorphismus. Eine funktion $f : V \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion $|\det D\varphi| \cdot f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^m$ integrierbar ist, und es gilt dann*

$$\int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|\, dx = \int_V f(y)\, dy$$

Beweis.

(1) Wir zeigen zuerst die Gültigkeit des Satzes für Funktionen $h|V$, wobei $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ eine Treppenfunktion mit $h|\mathbb{R}^d \backslash V \ = 0$ ist. Mit der Linearität der Integrale reicht es dazu, den Satz für $h = \chi_Q, \ \ Q \subseteq V$ kompakter Quader, zu zeigen.

Die Integrierbarkeit von h ist klar, die von $|\det D\varphi| \ h \circ \varphi$ folgt mit der Stetigkeit von $|\det D\varphi|$ und, da $h \circ \varphi \ = \chi_{\varphi^{-1}(Q)}$ und $\varphi^{-1}(Q)$ kompakt ist. Bleibt der Nachweis von

$$\int_{\varphi^{-1}(Q)} |\det D\varphi(x)| \ dx \ = \ \int_Q dy$$

Bezeichne $\psi = \varphi^{-1}$. $\det D\psi : V \to \mathbb{R}$ ist stetig, verschieden von 0, also $|\det D\psi|^{-1} : Q \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum Q. Folglich gibt es eine Zerlegung $Q = Q_1 \cup ... \cup Q_n$ in kompakte Quader mit $m\,(Q_i \cap Q_j) \ = 0, \ i \neq j,$ derart daß für alle $i = 1, ..., n$

$$\max_{y \in Q_i} |\det D\psi(y)|^{-1} \ - \ \min_{y \in Q_i} |\det D\psi(y)|^{-1} \ < \epsilon$$

Für $K_i := \psi(Q_i) \ \subseteq U$ gilt dann (wegen $|\det D\varphi(x)| \ = \ |\det D\psi(y)|^{-1}$)

$$\max_{x \in K_i} |\det D\varphi(x)| \ - \ \min_{x \in K_i} |\det D\varphi(x)| \ < \epsilon$$

Nun wenden wir Lemma 16.8 an ($\varphi(K_i) \ = Q_i$)

$$\left| \int_{K_i} |\det D\varphi(x)| \ dx \ - \ m(Q_i) \right| \ \leq \ \epsilon \, m\,(K_i)$$

Summation ergibt schließlich

$$\left| \int_{\psi(Q)} |\det D\varphi(x)| \ dx \ - \ m\,(Q) \right| \ \leq \ \epsilon \, m\,(\psi(Q))$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung für $h = \chi_Q$ und dann für Treppenfunktionen.

(2) Sei nun $f : V \to \mathbb{R}^m$ integrierbar. Mit Proposition 16.8 existiert eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $h_n|\mathbb{R}^d \backslash V \ = 0$ und

$$\lim_{n \to \infty} \int_V \|f(y) - h_n(y)\|_2 \ dy \ = 0$$

Wie im Nachweis vom Satz 16.4 von Fubini existiert eine Teilfolge $(H_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, so daß $h_{n_K}(y) \to f(y)$ punktweise für fast alle $y \in V$ mit $k \to \infty$. (Vergleiche anschließende Bemerkung).

Setze $g_{n_k} \ = (h_{n_k} \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|, \quad g = (f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$.
Wie in (1) gezeigt, sind die g_{n_k} integrierbar, und es gilt

$$\int_U \|g_{n_k}(x) \ - \ g_{n_j}(x)\|_2 \ dx \ = \ \int_V \|h_{n_k}(y) \ - \ h_{n_j}(y)\|_2 \ dy$$

Somit ist $(g_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchy-Folge (vgl. Blatt 8, Z19, Z20). Nach Konstruktion konvergiert $g_{n_k}(x)$ gegen $g(x)$ punktweise für fast alle $x \in U$. (Nullmengen werden durch $\psi = \varphi^{-1}$ in Nullmengen abgebildet). Mit dem Vollständigkeitssatz von Riesz-Fischer (Z20) ist g integrierbar über U. (In den Übungen werden nur reellwertige Funktionen betrachtet. Komponentenweises Vorgehen im $\mathbb{R}^m$ liefert den Satz von Riesz-Fischer auch für $\mathbb{R}^m$-wertige Funktionen). Schließlich gilt für das Integral

$$\int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)|\, dx \;=\; \int_U g(x)\, dx \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_U g_{n_k}(x)\, dx$$

$$\overset{(1)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_V h_{n_k}(y)\, dy \;=\; \int_V f(y)\, dy$$

(3) Ist $g = (f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$ integrierbar, so wende (2) an auf $\psi : V \to U,\ \ \psi = \varphi^{-1}$. Es folgt, daß f integrierbar ist und die Integralformel gilt.

$\diamond$

Bemerkung: Im Beweis von Satz 16.4 wurde folgendes Ergebnis hergeleitet, das es verdient, explizit formuliert zu werden, vergleiche auch den Satz von Riesz-Fischer:

Proposition 4.11 *Sind $f_n : A \to \mathbb{R}^m$ integrierbare Funktionen, $f : A \to \mathbb{R}^m$ integrierbar mit $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A \|f(x) - f_n(x)\|_2\, dx = 0$, so existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so daß $f_{n_k}(x) \to f(x)$ mit $k \to \infty$ für fast alle $x \in A$.*

Der Transformationssatz findet Anwendung beim Übergang zu krummlinigen Koordinaten unter dem Integral (vgl. §13, Analysis II).

Beispiel: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$

Sei $\tilde{\varphi} : [0,\infty[\, \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \ \tilde{\varphi}(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)^T$.
Mit dem Transformationssatz folgt: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion $g : [0,\infty[\, \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^m,\ \ g(r,\alpha) = r\, f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ integrierbar ist, und es gilt dann

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy \;=\; \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\, r dr\, d\alpha.$$

Für den Nachweis betrachte $U := \,]0,\infty[\, \times \,]0, 2\pi[$ und $V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(t,0) : t \geq 0\}$. Dann ist $\tilde{\varphi} : U \to V$ ein Diffeomorphismus, und mit $|\det D\tilde{\varphi}(r,\alpha)| = r$ folgt unter Beachtung, daß $\mathbb{R}^2 \backslash V = \{(t,0) : t \geq 0\}$ und $[0,\infty[\, \times [0,2\pi] \backslash U = \{0\} \times \{0, 2\pi\}$ Nullmengen im $\mathbb{R}^2$ sind, die Aussage mit Satz 16.9.