Final Exam

Thursday, 19 February 2014, 13:00 - 14:30

Last name: First name:

Date of birth: Matriculation number:

Signature*:

Problem	**1**	**2**	**3**	**4**	**Total**
Points	10	10	10	15	45
Points achieved					

Remarks:

(i) Please fill in the blanks on this page **completely** and **readably**.

(ii) Please start a new page for every new problem.

(iii) Except for a writing utensil, any kind of auxiliary material is prohibited.

(iv) You have to provide **detailed reasons** for every step in your mathematical arguments.

Notification of grades and exam inspection:
Grades and the date of the exam inspection (Klausureinsicht) will be published on the website of the chair.

* *Hiermit bestätige ich, dass ich vor Prüfungsbeginn darüber in Kenntnis gesetzt wurde, dass ich im Falle einer plötzlich während der Prüfung auftretenden Erkrankung das Aufsichtspersonal umgehend informieren muss. Dies wird im Prüfungsprotokoll vermerkt. Danach muss unverzüglich ein Rücktritt von der Prüfung beim zuständigen Prüfungsausschuss beantragt werden. Ein vertrauensärztliches Attest - ausgestellt am Prüfungstag - ist unverzüglich nachzureichen. Wird die Prüfung hingegen in Kenntnis der gesundheitlichen Beeinträchtigung dennoch regulär beendet, kann im Nachhinein kein Prüfungsrücktritt aufgrund von Krankheit beantragt werden. Wird die Prüfung wegen Krankheit abgebrochen, wird die Klausur mit der Note "5,0 - nicht erschienen" gemeldet und - unabhängig von einem Rücktrittsantrag - nicht bewertet.*

Problem 1
Let $(B_t)_{t\geq 0}$ be a standard Brownian Motion. Let

$$T := \inf\{t \geq 0 : B_t = 5t - 2\}.$$

Calculate $\mathbb{E}[T]$ (you may use the fact that $\mathbb{E}[T]$ is finite without proving it...).

Problem 2
Let $(B_t^{(1)})_{t\geq 0}$ and $(B_t^{(2)})_{t\geq 0}$ be two independent Brownian Motions. Let

$$W_t^{(1)} := \int_0^t \sin(s)\mathrm{d}B_s^{(1)} + \int_0^t \cos(s)\mathrm{d}B_s^{(2)}$$

and

$$W_t^{(2)} := \int_0^t \cos(s)\mathrm{d}B_s^{(1)} - \int_0^t \sin(s)\mathrm{d}B_s^{(2)}.$$

Show that $(W_t^{(1)})_{t\geq 0}$ and $(W_t^{(2)})_{t\geq 0}$ are two independent Brownian Motions.

Problem 3
Let $(B_t)_{t\in[0,1]}$ ba a standard Brownian Motion with respect to some measure P.

(i) Find a measure Q which is absolutely continuous w.r.t. P and such that the process $(X_t)_{t\in[0,1]} := (B_t + t^2)_{t\in[0,1]}$ is a Brownian Motion w.r.t. Q.

(ii) For $t \in [0,1]$, calculate

$$\mathbb{E}_Q[B_t^2]$$

(note that the expectation is taken w.r.t. the measure Q. It might be a good idea to avoid using the explicit representation of Q).

Problem 4
Let $(B_t)_{t\geq 0}$ ba a standard Brownian Motion and let $(X_t)_{t\geq 0}$ be defined by

$$X_t := \mathrm{e}^{-t/2}\cosh(B_t).$$

(i) Show that $(X_t)_{t\geq 0}$ is a martingale.

(ii) For each $s \leq t$, calculate the covariance between X_s and X_t.

(iii) Show that the distribution of the process $(X_t)_{t\geq 0}$ is not absolutely continuous w.r.t. the Wiener measure.